Um Ambiente Colaborativo a Distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos

Dora Soraia Kindel[1]

Janete Bolite Frant[2]

GD6 – Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação a Distância

RESUMO

O infinito se apresenta como uma das dificuldades para a compreensão do conjunto dos números reais por estudantes de diferentes níveis. Nesta pesquisa, busca-se investigar a noção de infinito dos licenciandos, elaborando e implementando tarefas sobre sequências e séries infinitas e sobre cardinalidade e analisando a constituição de objetos matemáticos e as interações entre participantes. O trabalho ocorreu mediante encontros presenciais e virtuais no ambiente *VMT-Chat*[3]. Adotou-se a metodologia de *Design Experiment* em três ciclos. A fundamentação teórico-metodológica articulou o Modelo da Estratégia Argumentativa[4] e a Teoria da Cognição Corporificada[5]. Os resultados mostraram que o ambiente favoreceu diferentes modos de expressão dos participantes. Corroboraram-se resultados de outras pesquisas, já que o infinito potencial esteve mais presente nas interações e nas respostas dos estudantes. Além disso, outras possibilidades foram vistas: a ideia de religiosidade associada ao infinito potencial; o impasse entre zero como limite e o infinito como soma dos termos de uma sequência infinita, entre outras. Como os estudantes sempre procuram estratégias que confirmem o processo iterativo infindável, com relação à negação do finito, novas tarefas deverão ser implementadas em pesquisas futuras.

Palavras-chave: Infinito potencial e atual. Argumentos. Mapeamentos conceituais. Ambiente virtual colaborativo. Tarefas não familiares.

O infinito − tema a todo momento presente quando se trata de matemática, em particular quando se abordam conjuntos numéricos − sempre intrigou a mente humana. A diversidade e a complexidade dos contextos em que o infinito aparecia ora aproximava ora distanciava os pensadores acerca do tema.

Um dos contextos desse movimento se deu a partir da necessidade que os gregos tinham para entender a dinâmica da relação entre o espaço e o tempo, que gerou os

[1] Orientanda UFRRJ/UNIBAN soraiakindel@yahoo.com.br

[2] Orientador UNIBAN janeteb@gmail.com

[3] Virtual Math Teams http://vmt.mathforum.org/VMTLobby/

[4] CASTRO; BOLITE FRANT, 2011.

[5] LAKOFF; NUNEZ, 2000; NUNEZ, 2005.

paradoxos: da flecha, de Aquiles e a tartaruga, do estádio. Essa discussão trouxe, em seu bojo, uma tensão entre opostos: o infinitamente grande em contraponto com o infinitamente pequeno.

O outro esteve relacionado com a finitude e infinitude do Universo e que não os levou a um consenso.

Apesar da Idade Média não fazer parte do escopo do presente trabalho, procurou-se encontrar elementos que pudessem contribuir na compreensão das questões que foram colocadas posteriormente identificando-se que na época o infinito esteve presente em questões religiosas e discussões filosóficas.

Sob o impulso das questões relacionadas ao movimento, a mecânica celeste e ao cálculo de áreas e volumes, durante o Renascimento, alguns conceitos e procedimentos de resolução de problemas desenvolvidos pelos gregos foram retomados. Os renascentistas aplicaram o método da exaustão, desenvolvido por Eudoxo, em situações envolvendo o infinito, sendo considerado atualmente como o precursor do cálculo dos infinitesimais e aprofundaram as concepções intuitivas da noção de limite e de continuidade.

A tentativa de representar no plano os "corpos tridimensionais" fez com que os renascentistas desenvolvessem a noção de perspectiva trazendo assim a discussão sobre o infinito para o campo da arte e da arquitetura.

Embora questões sobre o infinito tenham sido abordadas desde a Grécia Antiga[6] sua transição de infinito potencial para o infinito atual só ocorreu a partir das discussões dos matemáticos do século XIX, período em que os nomes mais expressivo são Bolzano e Cantor.

Bolzano foi um dos pioneiros na tentativa de formalizar o tema. Elaborou trabalhos sobre aritmetização do cálculo e deu definições sobre limite, derivada, continuidade e trabalhos pioneiros sobre convergência de séries, além de importantes estudos sobre as funções contínuas não deriváveis. Um de seus textos publicados se refere unicamente ao infinito, *Paradoxos do Infinito*. Nesse, em 70 parágrafos, Bolzano faz uma análise crítica da visão dos filósofos e matemáticos e apresenta o alicerce para a formalização do infinito matemático. Bolzano não se contenta em argumentar a favor dos conjuntos infinitos atuais, chegando a dar uma determinação intrínseca: todo conjunto infinito pode ser posto em correspondência biunívoca com uma de suas partes próprias (ou um conjunto bijetivamente

---

[6] BOYER, 2003.

equivalente a ele). É a descoberta fundamental dos “Paradoxos”. Sua teoria Matemática sobre infinidade antecipou a teoria de intervalos finitos de Cantor.

Com relação à comparação entre dois conjuntos infinitos, o que Cantor faz, além de colocar em correspondência biunívoca os elementos de dois conjuntos infinitos entre si, é redefinir o conjunto, ou seja, propõe que o conjunto seja visto como um todo independentemente de seus objetos. Assim, qualquer subconjunto de um conjunto infinito é também infinito. Continuando seus estudos, Cantor percebeu que nem todos eram iguais, identificando assim, infinitos conjuntos infinitos. Com essa e outras descobertas Cantor dá um impulso e uma definição no que diz respeito ao infinito atual e uma contribuição fundamental para o avanço da Matemática Moderna.

Mas, como o infinito tem sido abordado nos livros didáticos nos diferentes níveis de ensino? Como o infinito tem sido tratado em pesquisas recentes e na sala de aula? Como E como se processa a aprendizagem desse conceito nos diferentes níveis de ensino, em particular pelos licenciandos?

Há dois outros contextos além do histórico a serem considerados para a compreensão da ideia de infinito: o da sala de aula e o das pesquisas. No primeiro, pode-se abordar os livros didáticos[7] e a prática profissional e no segundo, existem muitas formas de abordagem.

Nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio não são realizados estudos específicos sobre o infinito. Entretanto, ele sempre aparece nos números irracionais, nas dízimas periódicas, nos intervalos reais e nos conjuntos numéricos. Para explicar o conjunto dos números naturais N e o dos inteiros Z usa-se o argumento de que sempre existe mais um. Passa-se sem comentários sobre o conjunto dos números racionais Q; e finalmente, o conjunto dos números reais R, a reta real é apresentada como uma representação gráfica. O infinito também aparece

No âmbito da prática profissional houve a necessidade de acompanhamento especial e com curiosidade sobre o desenvolvimento dos trabalhos de alunos em sala de aula, principalmente naqueles que envolviam aspectos dos conjuntos numéricos − tais como racional/irracional, conjuntos densos/não densos, finito/infinito – e naquelas que envolviam análise das representações decimais de números – tais como exato/aproximado, periódico/não periódico, cardinalidade de conjuntos.

[7] KINDEL, 2012.

Algumas dessas questões e observações resultaram no primeiro trabalho sistematizado – a dissertação de mestrado[8]. Durante essa pesquisa, procurou-se entender o que os alunos sabiam e compreendiam sobre a noção de densidade nos racionais.

A preocupação em discutir essas questões cresceu aos poucos, e a curiosidade foi gradualmente instigada em conversas com outros professores e amplamente estimulada no I Seminário Internacional Corpo, Tecnologia e Linguagem[9], em 2004, no qual foi realizada uma conferência, ministrada pelo Prof. Dr. Rafael Núñez. Naquela ocasião, ele ressaltou a importância da teoria da cognição corporificada para entender a construção do conceito de infinito na matemática.

No âmbito das pesquisas em Educação Matemática identificaram-se referências sobre diferentes abordagens acerca das concepções intuitivas sobre o infinito, estudos sobre o mapeamento básico do infinito, sobre o modo como os estudantes compreendem o infinito e investigações que buscam compreender como os estudantes lidam com os paradoxos e com a cardinalidade de Cantor[10].

Com relação ao público existem alusões a estudantes de diferentes níveis escolares, a estudantes de diferentes cursos superiores e a professores[11].

Na pesquisa desenvolvida por Kill (2010) com licenciandos de uma universidade pública brasileira além de procurar identificar qual a concepção que eles tinham sobre o infinito ele buscou saber: onde os estudantes aprenderam ou ouviram falar sobre o infinito, quais as suas crenças sobre a gênese do infinito, que importância os estudantes davam a esse conceito para a sua vida profissional e como pensavam ensinar o infinito para alunos dos níveis básicos.

Embora existam uma variedade de pesquisas envolvendo o infinito, não encontramos referência a estudos com licenciandos numa perspectiva de discussão e aprofundamento sobre o tema visando a sala de aula do Ensino Fundamental.

Assim, o objetivo desta pesquisa foi o de investigar e analisar a produção de significados sobre a noção de infinito de licenciandos de Matemática, em um ambiente privilegiado, em que a participação nas discussões pudesse ser efetiva. Em particular, buscou-se: verificar como as tarefas sobre infinito promovem ou não interações no

---

[8] Id, 1998.
[9] Realizado na PUC SP sob a coordenação de Janete Bolite Frant.
[10] FISCHBEIN; TIROSH; HESS, 1979; ZAZKIZ; HASSAN, 1998; MORENO; WALDEGG, 1991; TALL, 2001; FISCHBEIN, 2001; WELLER, McDONALD; BROWN, 2005; PENKONNEN et al, 2006; ZAZKIS; SIROTIC, 2004; entre outros.
[11] MONTORO e SHEUER, 2004; RIBEIRO SAMPAIO, 2009; KILL, 2010.

ambiente virtual, VMT_Chat[12], e refletir sobre as possibilidades e as limitações que esse ambiente apresenta para os licenciados e para a pesquisadora; analisar como são constituídos os objetos matemáticos relacionados aos infinitos potencial e atual; construir e analisar os mapeamentos cognitivos que emergem durante a constituição desses objetos.

Para delimitar o tema, optou-se por trabalhar com as sequências e séries infinitas, tema abordado nos três níveis de ensino. Foram consideradas, ainda, situações que envolviam a cardinalidade de Cantor.

Como o interesse é a compreensão da produção de significados para essa noção de infinito matemático, investigando também os tipos de mapeamentos cognitivos que emergem durante a constituição desses objetos, tomou-se como base teórica a Teoria da Cognição Corporificada[13] e a sua articulação com o Modelo de Estratégia Argumentativa[14].

A articulação entre as duas teorias a fim de compreender a produção de significados e a constituição de objetos matemáticos em sala de aula, é uma proposta das autoras[15], utilizada em outras pesquisas que envolveram a matemática no terceiro grau[16]

Este modelo caracteriza-se, portanto, como um tipo de "investigação centrada nos processos linguísticos em educação," que ocorre em contextos interativos de aprendizagem, envolvendo professores e estudantes.

Lakoff e Johnson (1999) enfatizam três pontos que representam resultados importantes para a ciência cognitiva, segundo os linguistas cognitivos: (a) mente e corpo não são separáveis; (b) o pensamento, na maioria das vezes, é inconsciente; e (c) conceitos abstratos são amplamente metafóricos. Esses resultados vêm ao encontro deste estudo e complementam a teoria sobre linguagem que embasou o MEA[17].

Em nosso estudo, o grupo foi formado por duplas ou trios de participantes voluntários, do curso de matemática, inscritos em um curso de extensão (descrito mais adiante), em que constantemente foram provocados ao poliálogo, vivenciando situações sobre as quais deviam expressar as suas opiniões e concepções sobre o conteúdo abordado; além de buscar estratégias para resolver os problemas propostos e usar os recursos

[12] Virtual Math Teams _VMT –Chat, disponível em http://vmt.mathforum.org/VMTLobby/
[13] Ibid.
[14] Ibid passim.
[15] Ibid passim.
[16]DALLANESE, 2006; MOMETTI, 2007.
[17]Em entrevista com as autoras, em novembro de 2011, que citaram Bakhtin, Perelman, Kristeva, entre outros.

disponíveis ao meio em que estão inseridos, aos quais se tem acesso através de registros escritos. Estes registros constituem o material para análise dessas interações.

Trabalhar com os argumentos, ou seja, com a fala e a interação dos participantes, leva a Sfard (2008), que propõe entender a "matemática como um discurso"; consequentemente, nesse caso, aprender matemática envolve modificá-lo e é nesse dialogar que ocorre a constituição de objetos matemáticos.

Vale ressaltar que objetos matemáticos são aqui entendidos como "[...] objetos abstratos com distintos significados matemáticos. Estes objetos são construções pessoais e diferentes matemáticos fazem associações diferentes com o mesmo significado"[18].

Para Arzarello et al (2004), a fenomenologia do processo de aprendizagem nas salas de aula de matemática revela uma variedade de ações e produções realizadas pelos estudantes e pelos professores enquanto usam diferentes recursos. Esses recursos − compartilhados pelos estudantes e, possivelmente, pelos professores − são usados não apenas como meios de comunicação, mas como ferramentas que ajudam no processo do pensamento. Neste caso, analisou-se o discurso escrito sobre os objetos matemáticos, postados tanto no *chat* quanto no quadro branco de uma plataforma a distância, durante o calor da discussão.

Concorda-se, logo, com Bairral[19], ao afirmar que um ambiente virtual é "[...] um complexo sistema sociointerativo que envolve múltiplos elementos", e destacam-se, para este estudo, alguns desses elementos mencionados pelo autor, entre eles: a comunidade constituída e a sua intencionalidade; as tarefas; os diferentes tipos de discurso; e as normas de participação e de colaboração estabelecidas.

Considerando que as tecnologias da comunicação e informação (TICs) fazem parte do dia-a-dia e que influenciam tanto a comunicação, quanto as formas de organização e pensamento sociais também buscamos encontrar estudos que apoiassem nossa ideia e encontramos algumas [20] que procuram analisar especificamente a contribuição dessas tecnologias no ensino. Por outro lado, nos meios educacionais, seu uso tem sido cada vez mais estimulado [21], embora, na realidade do ensino matemático escolar, nos níveis fundamental e médio, esse uso ainda seja limitado.

---

[18] SFARD, 2008, p. 193.
[19] BAIRRAL, 2007, p. 19.
[20] POWEL; BAIRRAL, 2006; BAIRRAL, 2007; HEALY, JAHN; RADFORD, 2008; entre outros.
[21] Sítios consultados: MEC, TABULEIRO DIFERENTE.

Com base nesses dados, a hipótese inicial é a de que a análise do discurso dos participantes sobre o infinito em um ambiente de discussão colaborativa, usando as TICs, pode contribuir para a formação inicial de professores de matemática.

Neste estudo, a comunidade se formou primeiro a partir do objetivo da pesquisadora, no propósito de ministrar um curso de extensão que pudesse discutir as noções de infinito que perpassam, ainda que de modo transparente, a matemática escolar do nono ano e do Ensino Médio; e, depois, se formou a partir da intenção dos estudantes em se matricular em um curso de caráter optativo.

Levando em conta apenas o elemento “comunidade”, seria possível optar por uma das várias plataformas de ensino a distância: *Moodle*, *Teleduc*, *Tidia*, entre outras. No entanto, ao pensar sobre as tarefas propostas para esta investigação, optou-se por observar interações discursivas que ocorrem no “calor” da resolução de problemas. O objetivo, desse modo, era o de acompanhar as mudanças nos discursos dos participantes durante o processo de resolução do problema e de colaboração uns com os outros. A vontade não era a de utilizar um *fórum*, onde, em geral, as contribuições dos participantes são postadas de modo assíncrono; daí a escolha pelo VMT.

A metodologia escolhida para sustentar esta investigação foi a de *Design Experiment*. O experimento de *design* supõe ser uma cama de testes para inovações educativas, ocorrendo em ciclos de experimentação, e, a cada um desses ciclos, é possível modificar o experimento, a partir da análise empírica. Entretanto, Cobb et al (2003) – autores que contribuem para a caracterização desse tipo de metodologia – alertam para o fato de que não se trata apenas de ver uma determinada inovação funcionar ou não, mas da necessidade de levantar novas teorias, ainda que humildes, sobre essa inovação.

A escolha pelo *Design Experiment* foi reforçada pelas características propostas pelos autores anteriormente citados, a saber: trata-se de uma concepção ao mesmo tempo *pragmática e teórica* cuja natureza é altamente intervencionista. Em razão disso, a pesquisadora propôs as tarefas, não deixando a cargo do grupo essa decisão, embora aspectos reflexivos tenham sido considerados. Logo, o caráter iterativo e prospectivo dessa metodologia surgiu naturalmente, a partir das características prospectiva e reflexiva. Afinal, já que é uma cama de testes, cada novo ciclo é planejado após uma reflexão acerca do anterior, criando, assim, uma nova hipótese que se constituiu em um novo ciclo do *design*. No caso deste estudo, houve três ciclos os quais, dessa forma, vieram a constituir a iteratividade do processo.

Durante o primeiro ciclo, de caráter prospectivo, realizou-se um levantamento bibliográfico, considerados três tipos de fontes: (a) a fonte histórica (livros especializados, dissertações e teses, dicionários filosóficos e históricos, enciclopédias); (b) as pesquisas na área de educação matemática (publicações em periódicos nacionais e internacionais, teses e dissertações) e os livros didáticos, dois de cada nível (ensino fundamental e médio); (c) e um levantamento das plataformas − *Teleduc*, *Moodle* e VMT − para cursos a distância, dentre as quais optou-se pela última.

As tarefas foram elaboradas a partir da revisão de literatura, das análises dos livros didáticos e das reflexões sobre o referencial teórico e foram discutidas em cursos de extensão, nos ciclos 2 e 3.

O material coletado para a análise foi composto essencialmente pelo texto escrito. Considera-se como texto, de acordo com a fundamentação teórica adotada, todo e qualquer tipo de registros escritos que se apresentaram como afirmações escritas no *chat* ou no *whiteboard* (WB) _ e que podiam ser revistos pelo *player_* ou pelo *summary,* postados no VMT ou, ainda, encaminhados para o e-mail da professora/pesquisadora.

Dentre os materiais, contou-se ainda com um diário de campo, em que foram realizadas anotações específicas sobre as dificuldades encontradas pelos participantes (professora e alunos), sobre o tipo de encaminhamento, sobre as intervenções da professora e sobre a reação do grupo diante da atividade.

Para a análise dos dados, recorreu-se ao MEA, a fim de explicitar os argumentos utilizados pelos estudantes ao participarem dos encontros, e à TCC, para que, a partir desses argumentos, fossem levantados alguns mapeamentos conceituais. A intenção era a de que, na complementaridade das duas propostas, fosse possível montar um quadro para entender melhor o pensamento dos estudantes sobre o infinito, o que permitiu a proposta de sugestões para futuras pesquisas.

Foi utilizada, inicialmente, a proposta de Castro e Bolite Frant (2011) sobre as etapas necessárias para a análise de dados. Em resumo, são elas: (a) a leitura exaustiva e a redução dos dados coletados; (b) a análise e a montagem de um esquema; (c) a elaboração do texto final da análise. Segundo Mometi[22] "[...] a redução dos dados se refere ao processo de seleção, focalização, simplificação, abstração e transformação dos dados brutos que aparecem escritos nas notas de campo". No caso deste estudo, tais anotações, geradas a partir da planilha do HTML do VMT, foram feitas após cada encontro.

[22] MOMETI , 2007, p. 89.

Os relatos e as reflexões, frutos de meses de pesquisa de campo, elucidaram as seguintes conclusões.

A análise sobre o que emergiu nas falas dos estudantes, enquanto se engajavam nas atividades, revelou a presença de uma gama variada de termos associados ao infinito, o que corrobora com as pesquisas de Ribeiro Sampaio (2009).

As interrelações existentes entre o panorama histórico da pesquisa e a análise dos livros didáticos apontam ainda uma considerável apropriação, por parte dos livros didáticos, de abordagens do infinito, ou seja, do infinito potencial como algo processual. Não é de se surpreender, portanto, que os estudantes apresentem essa concepção do infinito como sendo a mais "presente" em seu modo de pensar. Esses dados foram confirmados por Kill (2010), já que apontam que, para os licenciandos, "[...] a conceituação mais comum para o infinito, indicada como apropriada aos níveis Fundamental e Médio de ensino, foi a de infinito enquanto processo, num total de 54,6% e 46,6%, respectivamente" [23]e na de Kindel (2012) que identificou não só a apresentação desses termos como os licenciandos desenvolviam sua estratégia para a resolução dos problemas propostos baseando-se na ideia processual do infinito.

Para Lakoff e Nunez (2000), em seu livro *Where Mathematics comes from*, uma das formas de definir o infinito está associada a duas definições distintas: à de finito, do que tem um fim ou uma borda, e à de negação. Assim, é comum definir o infinito como algo que "não tem fim" [24]. Essa ideia fundamental, a negação do finito, permitiu a verificação de outros termos associados, tais como: inatingível (não tangível ou não palpável), incontável (não contável), indefinido (não definido, não determinado, imenso), sem fim e ilimitado (interminável).

Em suma, os resultados corroboraram-se resultados de outras pesquisas, já que o infinito potencial esteve mais presente nas interações e nas respostas dos estudantes. Além desta, surgiram outras possibilidades: a ideia de religiosidade associada ao infinito potencial; o impasse entre zero como limite e o infinito como soma dos termos de uma sequência infinita; e o uso de propriedades e operações válidas para os conjuntos finitos aplicados em contextos infinitos.

Com relação ao ambiente e as tarefas verificou-se que apesar de ser "teoricamente" possível realizar curso de extensão a distância para discutir conceitos matemáticos

[23] KILL, 2010, p. 211.
[24] LAKOFF; NUNEZ, 2000, p. 155

avançados, é necessário desenvolver outras pesquisas para entender melhor a dinâmica do desenvolvimento desses tipos de cursos onde a participação é voluntária. Embora as tarefas tenham promovido a interação entre os estudantes, é preciso oferecer outras com o intuito de promover o florescimento do infinito atual, ou seja, é preciso promover mais situações (e diferentes) para que os estudantes possam falar e/ou escrever sobre elas.

Além disso, outro ponto importante a ser investigado é aquele que envolve a comparação entre dois ou mais conjuntos infinitos fora do contexto dos números naturais. Existem diferentes formas de se olhar para a paridade de conjuntos infinitos. Logo, tarefas com esse tipo de abordagem precisam ser desenvolvidas para serem discutidas pelos estudantes em sala de aula.

Desse modo, diante do exposto, surgem as seguintes questões: que objetos matemáticos relacionados aos infinitos potencial e atual emergem em situações que envolvem intervalos? Quais os mapeamentos cognitivos que emergem durante a constituição desses objetos?

REFERÊNCIAS

AMADEI, L. F. *O infinito: um obstáculo no estudo da Matemática*. 122 fls. Dissertação Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica. 2005.

ARZARELLO, F. et al. *Infinity as a multi-faceted concept in history and in the mathematics classroom. PME*, n. 28, v. 4. Noruega:s/e, 2004.

BAIRRAL, M. A. Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais**.** Rio de Janeiro: Edur, 2007.

BARRETO, R. G. et al. *As tecnologias da informação e da comunicação na formação do professor.* Revista Brasileira de Educação**,** v. 11, n. 31, jan./abr. 2006. p. 31-42.

BOYER, C. B. *História da Matemática***.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

CAJORI, F. *Uma história da matemática***.** Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Sá da Costa,1989.

CASTRO, M. R.; BOLITE FRANT, J. *Modelo da Estratégia Argumentativa: análise da fala e de outros registros em contextos interativos de aprendizagem.* Curitiba: UFPR, 2011.

COBB, P. et al. *Design experiment in educational research*. *In:*Educational Researcher, v. 32, n. 1, Jan./feb. 2003. p. 9-13.

DALLANESE, C. *Argumentos e metáforas conceituais para a taxa de variação***.** 131 fls. Tese Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica. 2006.

FISCHBEIN, E. *Tacit models of infinity*. In:Educational Studies in Mathematics**,** v. 48, n. 2-3, p. 309-329, 2001.

FISCHBEIN, E.; TIROSH, D.; HESS, P. The intuition of infinity. In: *Educational Studies in Mathematics*, v. 10, p. 3-40, 1979.

HEALY, L; JAHN, A. P.; BOLITE FRANT, J. *Digital tecnologies and the challenge of constructing an inclusive school mathematics***.** In: ZDM, v. 42. Berlin: Berlin Print, 2010. p. 393-404.

KILL, T. G. *Conceituações sobre o infinito na história, nos livros didáticos e no pensar de futuros professores de matemática***.** 227fls. Tese Doutorado em Educação. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.

KINDEL, D. S. *Discutindo os racionais na 7ª série visando à noção de densidade***.** 1998. 265 fls. Dissertação Mestrado em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1998.

________. *Um Ambiente Colaborativo a Distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos*. 280 fls. Tese Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Bandeirante. 2012.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. *Where mathematics comes from.* USA: Basic Books, 2000.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought.* New York: Basic Books. 1999.

MOMETTI, A. L. *Reflexão sobre a prática: argumentos e metáforas no discurso de um grupo de professores de cálculo*. 273 fls. Tese Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 2007.

MORENO, E. Luis; WALDEGG, G.. *The conceptual evolution of actual mathematical infinity*. In: Educational Studies in Mathematics. V. 22 n. 3. 1991. p.211-231.

MONTORO, Virginia.; SHEUER, Nora. *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios.* In: E: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", , Nº 60. 2004. p. 435-448.

NUNEZ, R. E. *Creating mathematical infinities: metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals.* In: Journal of Pragmatics, v. 37, p. 1717- 1741, 2005. Disponível em: □www.elsevier.com.locate/pragma□. Acesso em: 3 abr. 2008.

PENKONNEN, E. et al. *Infinity of numbers: how students understand it.* In: NOVOTNÁ, J. et al. (eds.). In: PME, n. 30, v. 4. Prague. 2006. p. 345-352.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades.* Campinas: Papirus, 2006. Coleção Perspectiva em Educação Matemática.

RADFORD, L. *Culture and cognition: towards antropology of mathematical thinking*. In: ENGLISH, L. (ed.). Handbook of International Research in Mathematics Education. 2 ed. Nova York: Routledge; Taylor & Francis, 2008. p. 439-464.

RIBEIRO SAMPAIO, P. A. da S. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. In: *Bolema,* ano 22, n. 32. Rio Claro. 2009. p. 123-146.

SARDEIRO, F. *Argumentação dos professores de Matemática da Educação Básica quando pensam sua aula com computador*. 111 fls. Dissertação Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Bandeirante de São Paulo. 2010.

SFARD, A. *Thinking as comnunicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

TALL, D. Natural and formal infinities. *Educational Studios in Mathematics*, v. 48, n. 2-3, 2001. p. 199-238.

WELLER, K. et al. *Intimations of infinity*. 2005. Disponível em: □http://www.ams.org/notices/200407/fea-dubinsky.pdf□. Acesso em: 12 set. 2010.

ZAZKIS, R.; HAZZAN, O. *Interviewing in mathematics education research: choosing the questions.* Journal of Mathematical Behavior, v. 17, n. 4. 1998. p. 429-439.

ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. *Making sense of irrational numbers: focusing on representation.* In: HOINES, M. J.; FUGLESTAD, A. B. (ed.). PME, n. 28, v.4. Noruega. 2004. p. 497-505.