

Pensamento Matemático Avançado: um estudo a respeito de transformações lineares

Alessandra Senes Marins¹

Angela Marta Pereira das Dores Savioli²

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Utilizando teóricos como Tall (2002), Dreyfus (2002), Resnick (1987) investigaremos os processos de *representação e abstração* do Pensamento Matemático Avançado (P.M.A.) apresentados por graduandos de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com o conteúdo de Transformações Lineares. A Análise de Conteúdo de Bardin (2004) subsidiará as análises dos dados que serão coletados por meio de questionários aplicados aos estudantes.

Palavras-chave: Educação Matemática. Pensamento Matemático Avançado. Pensamento Algébrico. Transformações Lineares.

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem da matemática nos diferentes níveis da educação, Educação Básica e Superior, tem sido um tema de estudo de pesquisadores e professores que buscam novas abordagens, pois em geral, a matemática é ensinada baseada em uma abordagem mecânica, a qual enfatiza a memorização, reprodução de algoritmos e procedimentos sem proporcionar aos estudantes a compreensão dos significados de objetos matemáticos (Fiorentini et al.,1992).

Esta maneira de ensino e aprendizagem está presente desde as primeiras séries iniciais da Educação Básica, quando o ensino e aprendizagem se baseiam na reprodução de técnicas dos algoritmos das quatro operações, na repetição de problemas com contextos parecidos, sem conduzir os estudantes para a compreensão dos porquês: “sobe um”, “desce

¹ Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL - ale_marins@hotmail.com

² Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL – angelamarta@uel.br

um”, entre outros. Consequentemente, esta abordagem também se faz presente nas séries seguintes, como citam alguns autores:

Fiorentini et al. (1992) a respeito do ensino da Álgebra, aborda que

[...] a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra – de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas (p. 40).

E Ponte et al. (2009) quando há uma valorização dos símbolos no ensino, afirma que

[...] tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno. É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstracto, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios [...] (p.8).

O ensino por meio de repetição de técnicas não fica restrito a Educação Básica, ultrapassando suas barreiras e se estendendo ao Ensino Superior. É comum no próprio curso de Matemática, o ensino por meio da reprodução de procedimentos.

Para Tall (2002), existe um ciclo criativo que pode ser proporcionado aos estudantes do Ensino Superior, o qual o estudante considera um contexto de um problema em investigação que o conduz a formulação de conjecturas a fim de levá-lo ao refinamento e a prova. Porém para o autor, o ensino da matemática na graduação, na maioria das vezes, ao invés de ensinar ao estudante a participar desse ciclo, ou seja, do seu processo, se inicia com a forma final da teoria deduzida, o produto do Pensamento Matemático Avançado.

Dreyfus (2002) também afirma que os estudantes vão sendo ensinados a partir do produto da atividade de matemáticos em sua forma final, ao invés de serem conduzidos a processos que levam os matemáticos a construir esses produtos.

Nesse sentido, o presente projeto de dissertação pretende investigar quais são os processos de *representação e abstração* do Pensamento Matemático Avançado segundo alguns autores como Dreyfus (2002), no ensino e aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear, especificamente no conteúdo de Transformações Lineares.

A escolha do conteúdo de Transformações Lineares se dá por quatro razões: 1) é um conteúdo relevante na graduação de Matemática, pois tem relação com outras disciplinas do curso, como cálculo e análise; 2) alguns conteúdos básicos para o

aprendizado de Transformações Lineares estão presentes no Ensino Médio, como Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes, assim, proporcionando ao futuro professor de Matemática diferentes abordagens desses conteúdos; 3) por suas aplicações, na engenharia, agronomia; e 4) por ser um conteúdo exigido em algumas provas para um graduado em matemática, como prova de mestrado e concursos para ser professor do nível superior.

A seguir estão descritos: a) a questão que norteará pesquisa; b) o objetivo; c) a fundamentação teórica; e d) o encaminhamento metodológico.

QUESTÃO INVESTIGATIVA

Que processos de *representação* e *abstração* do Pensamento Matemático Avançado estudantes de matemática apresentam ao lidarem com Transformações Lineares?

OBJETIVO

Investigar os processos de *representação* e *abstração* do Pensamento Matemático Avançado apresentados por estudantes de matemática ao lidarem com o conteúdo de Transformações Lineares.

A investigação desses dois processos de *representação* e *abstração* é fundamental para inferirmos se os estudantes estão desenvolvendo seu raciocínio a respeito do conteúdo de Transformações Lineares dentro do Pensamento Matemático Avançado ou no Pensamento Matemático Elementar (P.M.E.), pois segundo Dreyfus (2002) estes dois processos estão presentes nos dois tipos de pensamento e a distinção entre os dois pensamentos está na complexidade em que são tratados e como essa complexidade é gerenciada. Na Fundamentação teórica veremos um pouco mais a respeito dessas diferenças do P.M.E. e P.M.A. segundo alguns teóricos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Destacaremos alguns pontos do que seria o Pensamento Matemático Avançado, como se constitui e algumas diferenças em relação ao Pensamento Matemático Elementar utilizando os seguintes autores: Dreyfus (2002), Tall (2002) e Resnick (1987). Primeiramente, estão descritas algumas considerações a respeito do Pensamento Algébrico na visão de Lins e Gimenez (1997), Ponte et al. (2009), Fiorentini et al. (1993) e Kaput (1995), pois fazem P.M.E. e é conteúdo básico para o aprendizado de Transformações Lineares que é um dos objetos de estudo do presente projeto, e em seguida estão algumas considerações a respeito do P.M.A.

Considerações a respeito do Pensamento Algébrico

O desenvolvimento de aspectos do Pensamento Algébrico nos estudantes contribui para a aprendizagem da Álgebra, segundo Lins e Gimenez (1997) é um modo dentre outros de produzir significado para a mesma. Para Ponte et al. (2009) o grande objetivo de estudo nesta área da Educação Básica é desenvolver o Pensamento Algébrico.

Para Fiorentini et al. (1993), esse tipo de pensamento pode manifestar de diversos modos, por meio da linguagem natural, da linguagem aritmética, da linguagem geométrica, ou pela “[...] criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica” (p. 88).

Matos (2007), ao fazer referência a Kaput (1995, 1999) a respeito da manifestação do Pensamento Algébrico, diz que esse tipo de pensamento se manifesta quando são estabelecidas generalizações sobre dados e relações matemáticas em processos de conjectura e argumentação, e para expressar essas generalizações usam-se linguagens cada vez mais formais.

E ainda, segundo Ponte et al. (2009) “[...] aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação” (p.10).

Existem alguns elementos que são caracterizadores do Pensamento Algébrico. De acordo com Fiorentini et al são a “[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (p.87).

Para Ponte et al (2009) o pensamento algébrico possui três vertentes fundamentais: representar; raciocinar; e resolver problemas e modelar situações. O quadro a seguir sintetiza essas vertentes.

Quadro 1: Vertentes Fundamentais do Pensamento Algébrico

VERTENTES FUNDAMENTAIS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO	
Representar	<ul style="list-style-type: none"> • Ler, compreender, escrever e operar com símbolos as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	<ul style="list-style-type: none"> • Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none"> • Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: PONTE et al, 2009, p. 11

Entre os autores existem algumas convergências tanto na manifestação do pensamento algébrico – utilizando alguma linguagem, quanto nas características que o constituem – percepção de regularidades, processos de generalização, processos de conjectura e argumentação. Pretendemos investigar essas convergências na presente pesquisa, e verificar se existe alguma convergência com o P.M.A..

Considerações a respeito do Pensamento Matemático Avançado

Segundo Dreyfus (2002) alguns processos estão presentes no P.M.E. e também no P.M.A., que são os de *representação* e *abstração*, e a diferença, segundo o autor, está na complexidade em que são tratados e como essa complexidade é gerenciada. “[...] Por meio

de abstração e representação, pode-se passar de um nível de detalhe para o outro e, assim, gerenciar a complexidade” (DREYFUS, 2002, p. 26, tradução nossa)³.

Para o autor a compreensão de um objeto matemático é um tema intrigante que muitos estudiosos buscam entender e um objetivo que a grande parte dos professores almeja alcançar para seus estudantes. Esta, na maioria das vezes, é obtida a partir de uma longa sequência de atividades, durante a qual uma vasta variedade de processos mentais ocorrem e interagem. Processos que não acontecem por si mesmos, e caso aconteçam geralmente não são de maneira consciente por parte do estudante (DREYFUS, 2002).

Para Dreyfus (2002) os processos envolvidos na *representação* são: o processo de representação; a mudança de representações e a tradução entre elas; e a modelação. No processo de *representação* existem três elementos principais: as representações simbólicas, as representações mentais e a visualização.

Segundo Domingos (2006) ao escrever a respeito da concepção de Dreyfus (1991), das representações simbólicas:

[...] os símbolos permitem conduzir um pensamento proceptual. Eles envolvem relações entre signos e significado, servem para desenvolver o conhecimento pessoal implícito, o significado, que é explicitado através desses símbolos. [...] a representação simbólica é externamente escrita ou falada com o objectivo de tornar a comunicação mais fácil (p. 6).

Das representações mentais:

Representar um conceito significa gerar um exemplo, uma imagem ou um caso. [...] a representação mental refere-se aos esquemas internos ou imagens de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. A representação mental torna-se assim fundamental para que a pessoa possa comunicar o seu pensamento acerca de um dado objecto ou processo (p. 6).

Da visualização:

[...] processo pelo qual as representações mentais podem ser criadas. Ela oferece-nos intuição e compreensão, surge como um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e compreensão dos conceitos matemáticos (p. 6).

Se as várias representações mentais do mesmo conceito tiverem relacionadas e se complementarem, integrando em uma mesma representação, há a mudança de

³ By means of abstracting and representing, one can move from one level of detail to another and thus manage the complexity (DREYFUS, 2002, p. 26).

representação e a tradução entre elas. De acordo com Domingos (2006), escrevendo a respeito desses processos, “a necessidade de mudar de uma representação para outra se torna evidente sempre que a outra seja mais eficiente para o passo que pretendemos dar. O processo de mudar de representações está assim intimamente associado com o de representar” (p. 6). E ainda, “no caso do pensamento matemático avançado esta tradução pode ser entendida como o passar da formulação de uma propriedade matemática ou problema para outro” (p. 6).

E por fim, a *modelação*, processo presente na *representação*, “[...] significa construir uma estrutura matemática ou uma teoria que incorpora as características essenciais do objecto, sistema ou processo a ser descrito” (DOMINGOS, 2006, p. 6 e 7).

De acordo com Dreyfus (2002), para acontecer o *processo de abstração* é necessário como pré-requisito além do *processo de representação*, a *generalização* e a *síntese*. Para ele generalizar é [...] obter ou induzir de situações particulares para identificar traços ou atributos comuns que permitem expandir os domínios de validade (DOMINGOS, 2006, p. 7). E sintetizar “[...] significa compor ou combinar partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade (p. 7)”.

Para Tall (2002) existe um ciclo completo de atividades do P.M.A. e considera que muitas das atividades deste ciclo também ocorrem no pensamento elementar, a distinção está na possibilidade de usar definições formais e deduções,

Concentramos a nossa atenção no ciclo completo de atividade no pensamento matemático avançado: a partir da ação criativa de considerar um contexto de um problema em investigação matemática que conduz a formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova. Consideramos que muitas das atividades que ocorrem neste ciclo também ocorrem na matemática elementar de resolução de problemas, mas a possibilidade de fazer deduções e definições formais é o fator que distingue o pensamento matemático avançado (p. 3, tradução nossa)⁴.

Segundo Domingos (2006) se referindo a Tall (1995), aponta que ele desenvolve numa perspectiva cognitivista a evolução do pensamento matemático, utilizando três componentes da atividade humana: “a *percepção* como entrada, o *pensamento* como processamento interno e a *acção* como saída” (p. 1). E ainda faz uma comparação com a

⁴ [...] We then focus our attention on the full cycle of activity in advanced mathematical thinking: from the creative act of considering a problem context in mathematical research that leads to the creative formulation of conjectures and on to the final stage of refinement and proof. We postulate that many of the activities that occur in this cycle also occur in elementary mathematical problem - solving, but the possibility of formal definition and deduction is one factor which distinguishes advanced mathematical thinking. We will also find that teaching undergraduate mathematics often presents the final form of the deduced theory rather than enabling the student to participate in the full creative cycle (TALL, 2002, p.3).

matemática elementar, pois pensando apenas em entrada e saída, ela “começa com a *percepção* de objetos do mundo real e a *acção* sobre esses objetos” (p. 1).

Para Tall, segundo Domingos (2006), os objetos na matemática elementar são descritos e na matemática avançada são definidos, e ainda considera que,

“[...] embora em ambos os casos seja usada a linguagem para formular as propriedades dos objectos, na matemática elementar a descrição é construída a partir da experiência com o objecto, na matemática avançada as propriedades dos objectos são construídas a partir da definição” (p. 3).

Domingos (2006) ao fazer referência a Tall, diz que essa inversão traz dificuldades para os iniciantes no P.M.A., fazendo necessário recorrer a outros tipos de representação.

E ainda, traz a transição da passagem do P.M.E. para o P.M.A. segundo a visão de Tall,

[...] da descrição à definição, do convencer ao provar de uma forma lógica baseada nestas definições. Esta transição requer uma reconstrução cognitiva que se vê durante o início do percurso no ensino superior como uma luta com as abstrações formais como se elas dominassem a aprendizagem nesta fase inicial. É a transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada, baseada em entidades abstractas que o indivíduo deve construir através de deduções das definições formais (DOMINGOS, 2006, p. 5).

Segundo Lauren Resnick (1987) não é fácil destacar algumas características do Pensamento Avançado, quando isso acontece temos que estar cientes que, “[...] embora não possamos defini-lo exatamente, podemos reconhecer o pensamento avançado quando este ocorre” (p. 2). Para ela, o Pensamento Avançado:

- Não é algoritmo. Isto é, as ações não são previstas.
- Tende a ser complexo. O processo não é “conhecido” (mentalmente falando) mesmo de uma posição favorável.
- Frequentemente aponta soluções múltiplas, cada uma com custos e benefícios, em vez de uma única solução.
- Envolve julgamento e interpretação com nuances.
- Envolve aplicações múltiplas, que às vezes se conflitam uma com a outra.
- Envolve a auto regulação do processo de pensamento. Não reconhecemos um pensamento avançado no indivíduo quando esse pergunta “os passos do jogo”.
- Envolve significado abrangente, resultando na estrutura em desordem aparente.

- Exige esforço. Há um trabalho mental considerável envolvido nas elaborações e nos julgamentos exigidos (RESNICK, 1987, p. 3, tradução nossa)⁵.

Para investigar os processos de *representação* e *abstração* do P.M.A. apresentados por estudantes de matemática ao lidarem com o conteúdo de Transformações Lineares, será realizada uma comparação entre esses dois tipos de pensamentos em relação aos elementos em comum, com o intuito de inferir quando é que o estudante passa do nível do P.M.E. para o P.M.A..

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

A pesquisa será desenvolvida de acordo com uma abordagem qualitativa de Bogdan e Biklen (1994) de cunho interpretativo. Foi escolhida essa abordagem por considerar adequada a aplicação de tarefas relativas ao conteúdo de transformações Lineares e aos processos de *representação* e *abstração* referentes ao Pensamento Matemático Avançado.

Lançando mão da abordagem qualitativa de Bogdan e Biklen (1994), os dados serão coletados por meio de registros escritos pelos estudantes, ou seja, a partir de respostas dadas a perguntas referentes ao conteúdo de Transformações Lineares. Para a aplicação das perguntas, seguiremos um cronograma previamente elaborado que almeja atender o objetivo da pesquisa. Os dados recolhidos não terão o intuito de confirmar hipóteses previamente construídas, ao contrário, a análise dos dados será de forma indutiva, à medida que os dados forem recolhidos. O foco na aplicação das tarefas estará nos sujeitos da pesquisa, tanto na realização de suas tarefas quanto em relação aos significados que dão para o objeto de estudo, pois o objetivo é perceber “[...] aquilo que

⁵ - Higher order thinking is *nonalgorithmic*. That is, the path of action is not fully specified in advance.
- Higher order thinking tends to be complex. The total path is not “visible” (mentally speaking) from any single vantage point.
- Higher order thinking often yields multiple solutions, each with costs and benefits, rather than unique solutions.
- Higher order thinking involves nuanced judgment and interpretation.
- Higher order thinking involves the application of multiple, which sometimes conflict with one another.
- Higher order thinking involves self-regulation of the thinking process. We do not recognize higher order thinking in an individual when someone else “calls the plays” at every step.
- Higher order thinking involves imposing meaning, finding, structure in apparent disorder.
- Higher order thinking is effortful. There is considerable mental work involved in the kinds of elaborations and judgments required (RESNICK, 1987, p. 3).

eles experimentam, o modo como eles interpretam as suas experiências e o modo como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem” (PSATHAS, 1973, apud BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 51).

Os sujeitos da pesquisa serão estudantes do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, que já cursaram a disciplina de Álgebra Linear.

Para a obtenção dos dados a serem analisados, será desenvolvido um questionário a ser aplicado em duas etapas: na primeira contendo perguntas relativas ao conteúdo de Transformações Lineares, sua relação com problemas cotidianos e com outras disciplinas do curso; e na segunda etapa serão aplicados alguns problemas matemáticos envolvendo esses fatores.

Para a análise e interpretação dos dados, utilizaremos a Análise de Conteúdo de Bardin (2004). Segundo a autora, o campo, o funcionamento e o seu objetivo se resumem da seguinte maneira:

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDÍN, 2004, p. 37).

As diferentes fases da Análise de Conteúdo segundo Bardin (2004), “organizam-se em torno de três polos cronológicos: 1) a pré-análise; 2) a exploração do material; 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação” (p. 89).

A primeira fase é de organização, geralmente nela é feita “[...] a escolha dos documentos a serem submetidos à análise, a formulação das hipóteses e dos objetivos e a elaboração dos indicadores que fundamentam a interpretação final” (p. 89). Segundo a autora esses fatores não necessariamente obedecem a uma ordem cronológica.

Na pré-análise existe algumas atividades fundamentais segundo Bardin (1994): a) leitura flutuante; b) escolha dos documentos; c) a formulação das hipóteses e dos objetivos; d) a referenciação dos índices e a elaboração de indicadores; e e) a preparação do material.

A exploração do material é a fase de administração das técnicas sobre o corpus escolhido. E o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação, é a fase em que o pesquisador irá validar seus dados, precisará utilizar de operações estatísticas para, a partir disso, propor inferências e interpretações a respeito dos objetivos previstos ou de novas descobertas (BARDIN, 2004).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edição 70 Ltda., 2004.
- BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigações qualitativas em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.
- DOMINGOS, A. **Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados**. In: XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Setúbal, 2006.
- DREYFUS, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 25-41.
- FIorentini, D.; MIGUEL, A.; MIORIN, M. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. v.4, n.1 [10], p. 78-91, 1993.
- LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.
- MATOS, A. S. S. M. de. **Explorando Relações Funcionais no 8º Ano: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2007. 254 p. Dissertação (Mestrado em Educação Especialidade de Didática da Matemática). Universidade de Lisboa.
- PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC, 2009.
- RESNICK, Lauren B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987.
- TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. A. J. Bishop, Cambridge, U. K, 2002.