A Compreensão do Conceito de Volume como Grandeza no Ensino Médio

Ana Paula Nunes Braz Figueiredo[1]

Orientadora: Paula Moreira Baltar Bellemain[2]

Coorientadora: Rosinalda Aurora de Melo Teles[3]

GD 03 - Educação Matemática no Ensino Médio

RESUMO

Neste texto apresentamos uma investigação sobre o conceito de volume mobilizado por alunos do ensino médio, considerado como um dos constituintes do campo conceitual das grandezas geométricas. A pesquisa está baseada nos estudos sobre área de figuras planas como grandeza de Regine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian; adota como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Gérard Vergnaud e colaboradores. Foi aplicado um teste piloto para dez alunos do terceiro ano do ensino médio da rede privada da cidade do Recife-PE. Dentre os resultados obtidos, observa-se que a maioria compreende volume como grandeza diante de situações de medida, reconhece a fórmula do volume do paralelepípedo e da pirâmide e recorre à representação simbólica dos sólidos durante a resolução das questões.

Palavras-chave: grandezas e medidas. livro didático. teoria dos campos conceituais. volume.

INTRODUÇÃO

O trabalho com grandezas geométricas, como área, comprimento e volume, foi marcado durante um longo período por uma ênfase exagerada na utilização de fórmulas e conversão de unidades, o que ainda se observa nos livros didáticos do ensino médio de acordo com a avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2011).

Apesar de a fórmula ser uma ferramenta importante para o cálculo de volume e de outras grandezas geométricas, o seu uso mecânico, sem a compreensão de seu significado, bem como a aplicação exagerada destas para compreensão das grandezas têm se mostrado

[1] apnbf@yahoo.com .br- Aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – Centro de Educação - UFPE.

[2] paula.baltar@terra.com.br (Orientadora) – Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – Centro de Educação – UFPE.

[3] rosinaldateles@yahoo.com.br (Co-orientadora). Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – Centro de Educação – UFPE.

ineficazes e geradores de entraves, como por exemplo, a omissão ou o uso inadequado de unidades de volume (OLIVEIRA, 2002).

Torna-se relevante o estudo da grandeza volume dentro de um programa de matemática vivenciado no ensino médio, não só por configurar a prática social da disciplina, como também por possibilitar a integração entre os vários tópicos programáticos (sistema de numeração, medidas, operações com números racionais, geometria) e com outras disciplinas como a física e a química.

Ainda que alguns dos aspectos a serem estudados sejam complexos, a necessidade do uso social gera a responsabilidade da escola em explorá-los desde o ingresso do aluno e permitir a consolidação das habilidades e das competências do aluno a respeito deste conteúdo no ensino médio.

Nas coleções avaliadas pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD 2012 (BRASIL, 2011) observou-se que problemas que envolvem volume ainda dão ênfase a aplicações da álgebra, o que permite ao aluno pouca visualização espacial para compreensão de volume. O guia do Livro didático sugere que seria interessante explorar outras perspectivas para representação dos objetos, pois algumas ilustrações apresentam falhas que dificultam a visualização.

Portanto, este trabalho visa a obtenção de um diagnóstico dos conhecimentos dos alunos do ensino médio a respeito da grandeza volume, a partir de um estudo das situações que dão significado ao conceito de volume, adotando como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), além de apresentar como hipóteses didáticas que provêm das pesquisas desenvolvidas por Douady e Perrin-Glorian (1989), as quais distinguem três quadros para compreensão do conceito de área como grandeza: o quadro numérico, o quadro das grandezas e o quadro geométrico.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Modelização Didática Relativa às Grandezas Geométricas

Para a análise do objeto de estudo levamos em consideração a modelização didática relativa ao conceito de área proposta por Douady e Perrin-Glorian (1989) e transposta para o conceito de volume (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; BELLEMAIN E LIMA, 2010):

Quadro geométrico: constituído por superfícies planas que são modelos matemáticos de faces planas de objetos do mundo físico. São essas figuras que são comparadas com relação ao atributo área. Neste estudo relacionaremos este quadro com o atributo volume, assim será constituído por objetos tridimensionais, contendo as dimensões: altura, largura e comprimento.

Quadro numérico: consistindo nas medidas de área, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos. Para o caso de volume, constitui a sua medida, que também pertence ao conjunto dos números reais não negativos.

Quadro das grandezas: contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Da mesma forma para o volume como grandeza, caracteriza como classes de equivalência de objetos de mesmo volume.

Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

Para Vergnaud (1990), a constituição de um conceito depende de três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas. O conceito é então definido por:

C= {S, IO, Σ}

Em que:

S = conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência).

IO = conjunto de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução do problema (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), sobre os quais se apóiam a operacionalidade dos esquemas (variável psicológica).

Σ = conjunto de representações simbólicas utilizadas/possíveis, tanto para apresentação quanto para resolução do problema (possibilidade de representação simbólica do conceito).

Desta maneira, o conceito é um conjunto constituído por situações de referência, por invariantes operatórios e sistemas de representação simbólica.

Isso implica que para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente, não se pode reduzir o significado nem aos significantes nem às situações. Assim, um único conceito não se refere a um só tipo de situação e uma única situação não pode ser analisada com um só conceito.

Segundo Vergnaud (1990) esquema é a organização da conduta para uma certa classe de situações. Teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operatórios, logo, são componentes essenciais dos esquemas, são os conhecimentos contidos nos esquemas. Teorema-em-ação é uma proposição considerada como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante.

Diante de um levantamento sobre situações em estudos que tinham como aporte teórico a Teoria dos campos conceituais (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008), classificamos as situações que dão sentido a volume em:

- **Comparação de volumes**;
- **Medida de volume**;
- **Produção de sólidos**;
- **Transformação de unidades**;
- **Adição e subtração de volumes**.

Esta classificação está também presente no trabalho em andamento de Leonardo Bernardo de Morais, aluno do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, o qual estuda o tema volume como grandeza nos livros didáticos do ensino médio. Ressaltamos também que estes trabalhos se articulam ao grupo de estudos Pró-Grandeza[3], o qual se debruça sobre o ensino-aprendizagem das grandezas geométricas e suas medidas, mas particularmente comprimento, área e volume.

Análise específica de cada tipo de situação

Situações de comparação

Na situação mais simples, os problemas de comparação consistem em determinar, dados dois sólidos, se eles tem mesmo volume ou qual dos dois tem volume maior. Nos casos em que são apresentados mais de dois sólidos, trata-se de ordenar os sólidos, e nesse caso, intervem a transitividade da relação de ordem. Situações de comparação exigem do aluno a passagem do quadro geométrico para o quadro das grandezas, levando em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas

[3] Grupo de pesquisa do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco liderado pelos professores Dr. Paulo Figueiredo Lima, Drª Paula Moreira Baltar Bellemain e Drª Rosinalda Teles.

construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989). Situações em que são comparados sólidos ocos ou maciços ou realizar comparações estáticas ou dinâmicas podem favorecer ou bloquear as estratégias mobilizadas pelos alunos.

Podemos observar como estratégias: visual (perceptiva), inclusão, decomposição-recomposição, imersão, medida e comparação das medidas, e comparação das massas.

Situações de medida

Situações de medida de volume permitem a articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas, ao calcular o volume de um sólido, o aluno passa do quadro geométrico para o numérico, e ao reconhecer a medida como sendo da grandeza volume, passa para o quadro das grandezas.

Os alunos podem utilizar diferentes estratégias para resolverem problemas desse tipo, tais como: contagem de unidades (sólidos unitários), uso de fórmulas, princípio de Cavalieri, imersão, preenchimento e transvazamento.

A partir de trabalhos anteriores (OLIVEIRA, 2002; BARROS, 2002; ANWANDTER-CUELLAR, 2008) podemos observar como entraves: confusão entre as grandezas (natureza, instrumento de cálculo ou variação), uso inadequado de unidades ou ausência do uso de unidades, desconhecimento da fórmula, dificuldade na identificação das medidas a serem utilizadas no cálculo, dificuldades no cálculo numérico, dificuldades no manejo com números racionais.

Situações de Transformação de unidades

São situações que exigem a mudança de unidades ou transformação de unidades.

O aluno poderá encontrar dificuldades ao se deparar com variáveis presentes para este tipo de situação como a natureza das unidades (homogeneidade das unidades de medida das arestas, o que não requer transformação de unidades, ou heterogeneidade das unidades de medida, ou seja, há diferentes unidades de medida de arestas correspondendo a múltiplos ou submúltiplos de uma unidade de medida, em que requer a transformação prévia das unidades de medida em uma única unidade de medida) e nos casos de transformação e conversão de unidades. Para a transformação de unidades de medida, o aluno dispõe da estratégia de medir o volume de um mesmo sólido usando unidades diferentes, como por exemplo: medir o volume de sólido formado por cubinhos de 1cm de aresta, pode ter como resposta a unidade de medida de volume cubinhos ou a unidade de medida cm^3. Para a conversão de unidades, o aluno deverá utilizar a estratégia de converter uma unidade de volume em outra, ou seja, de uma unidade de medida para um de seus múltiplos ou submúltiplos, ou de uma unidade de medida de volume para uma unidade de medida de capacidade, ou vice-versa.

Situações de Produção

São situações que se caracterizam pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado. Podendo ser: produção de um sólido com volume dado, produção de um sólido com volume menor ou maior, produção de um sólido de volume igual ao de outro sólido dado.

Como estratégias o aluno pode se dispor: da composição, da decomposição-recomposição e do Princípio de Cavalieri.

Situações de adição e subtração de volumes

Consiste em operações de adição e/ou subtração entre medidas de volumes apresentadas.

Podem apresentar como variáveis a homogeneidade ou não de unidades e a natureza dos números (naturais, racionais, reais), o que irá dificultar as estratégias utilizadas pelos alunos.

Objetivos

Objetivo geral

Analisar a compreensão da grandeza volume por alunos do ensino médio, sob a ótica da teoria dos campos conceituais.

Objetivos específicos

-Caracterizar como os alunos do ensino médio distinguem e articulam os quadros geométrico, numérico e das grandezas na resolução de problemas envolvendo volume.

-Identificar tipos de situações que dão sentido a volume para os alunos do ensino médio.

- Identificar os invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados por alunos de ensino médio, diante de problemas envolvendo volume.

- Caracterizar como os alunos do ensino médio lidam com as representações simbólicas em jogo na resolução de problemas envolvendo volume.

METODOLOGIA

Devido o caráter qualitativo desta pesquisa, optamos por realizar um estudo de caso, na qual trabalhamos com um grupo de dez alunos do ensino médio da rede privada de ensino da cidade do Recife-PE.

Para o estudo de caso, a pesquisa foi dividida em seis etapas:

-Construção e análise *a priori* do teste de sondagem;

-Seleção das escolas e dos alunos a serem pesquisados,

-Aplicação e resolução do questionário pelos alunos selecionados;

-Análise das respostas obtidas dos alunos e confrontação com a análise *a priori*.

Desta forma, agrupamos as atividades que foram aplicadas aos alunos de acordo com o tripé de Vergnaud (1990) para a obtenção de um conceito (situações, invariantes operatórios e representações simbólicas) e levando em consideração a articulação entre os quadros geométrico, numérico e das grandezas construídos por Douady e Perrin-Glorian (1989).

A escola foi selecionada por estar à disposição deste estudo, ter colegas professores de matemática como professores atuantes nas salas de aula do ensino médio.

Como o tema volume só é ensinado no fim do ano letivo do segundo ano ou no início do terceiro ano do ensino médio, decidimos realizar nosso estudo exploratório com o terceiro ano do ensino médio. Desta forma, aplicamos em sala de aula, um teste de sondagem contendo 11 questões sobre o tema volume, com dez alunos, que resolveram individualmente as questões com apenas lápis e papel a sua disposição.

Diante das situações listadas nos trabalhos de Barros (2002), Oliveira (2002) e Anwandter-Cuellar (2008), selecionamos dentre questões de vestibulares, do Enem e de alguns trabalhos já citados, as 11 questões que foram analisadas para a construção do instrumento de coleta de dados desta pesquisa e consideramos para este estudo a classificação dos problemas em: problemas de comparação, de medida, de produção e de transformação de unidades.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O resultado parcial obtido com 10 alunos do ensino médio de uma escola da rede particular de ensino é explicitado na tabela a seguir:

Tabela 1: Percentual dos resultados

Situação	Questão	% acertos	% erros	% não respondeu
Medida	Q2, Q3, Q4, Q8, Q10, Q11	46,7	38,3	15
Comparação	Q1, Q5	40	45	15
Produção	Q6, Q7a, Q7b, Q7c	22,5	50	27,5
Transformação	Q9a, Q9b, Q9c, Q9d	42	24	34

As questões que envolvem situação de medida foram as que obtiveram maior percentual de acerto, o que reforça ainda mais a ênfase dada no ensino a esses tipos de situações. Nas questões de medida, a fórmula foi a estratégia mais utilizada. Dentre os erros presentes podemos verificar um erro relativo à identificação do sólido (o aluno pensa que se trata de um prisma de base triangular e resolve usando essa fórmula) e um erro na atribuição da unidade de medida no resultado (ele expressa o volume em metros, ao invés de usar metros cúbicos), conforme exemplo a seguir:

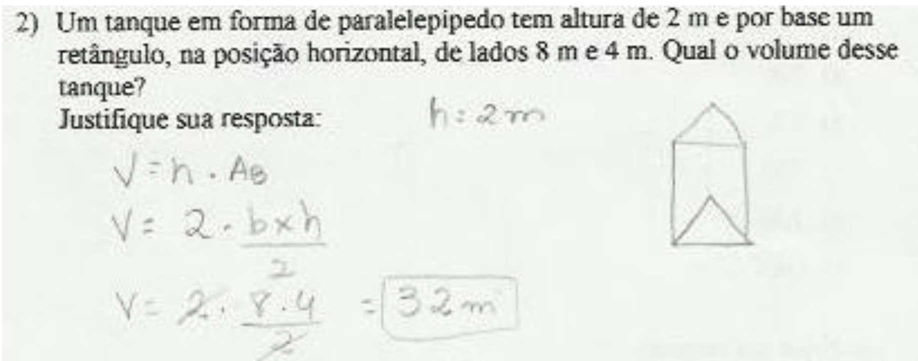


Figura 1

A questão 9 envolve uma situação de transformação de unidade, em que a maioria não sabe transformar as unidades de medidas e alguns desconhecem a relação entre as unidades de medida de capacidade e de volume (litro e m^3). Podemos observar no exemplo a seguir, que o aluno mobiliza corretamente o conceito-em-ação da relação existente entre as unidades de volume e de capacidade (representou a relação de correspondência entre 1 m^3 e 1000 L e entre 1 L e 1 dm^3), porém não consegue transformar o litro em seus submúltiplos, ao verificar que tal aluno desenvolveu a relação 1dL = 1.10L = 10 L. Ver exemplo abaixo:

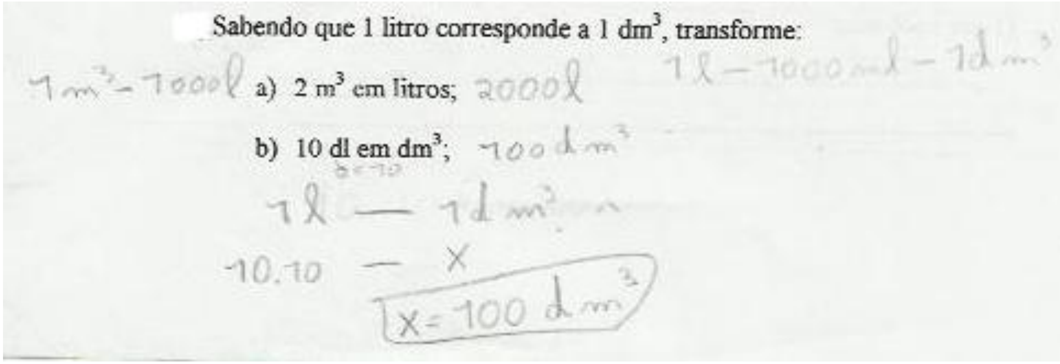


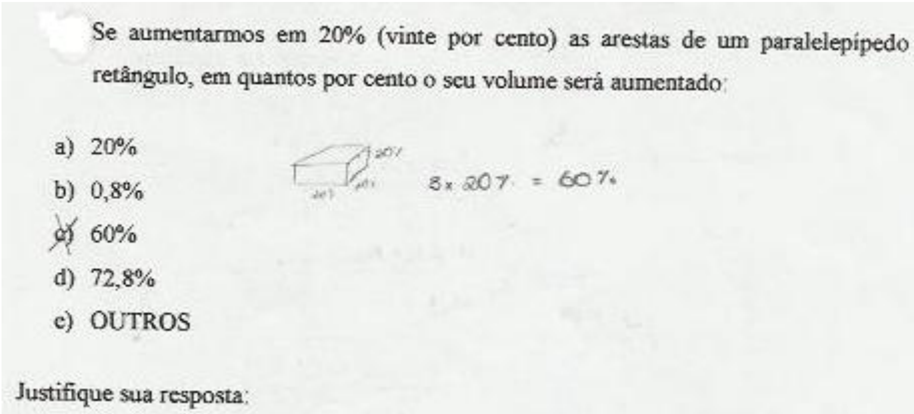
Figura 2

A questão 11 tem como objetivo observar se os alunos compreendem a trilinearidade do volume, mais precisamente, pedindo ao aluno para verificar quantos por cento aumenta o volume de um paralelepípedo se suas arestas sofrerem aumento de 20%. Apenas um aluno acertou a questão, embora um dos erros foi devido ao cálculo.

Segundo Vergnaud (1990), a grandeza volume se insere no campo conceitual das estruturas multiplicativas e para a sua compreensão faz-se necessário a passagem de uma concepção aditiva da grandeza volume (como na contagem de cubinhos para calcular o volume) para a concepção multiplicativa que, segundo o autor supracitado, é um processo lento e difícil do desenvolvimento cognitivo do sujeito. Desta forma, podemos esperar que os alunos ainda adotem a concepção linear de volume, desenvolvendo o teorema-em-ação errôneo de que o volume altera na mesma proporção que a aresta, ou seja, se a aresta aumentar de 20%, então o volume também aumenta de 20%, respondendo a alternativa a, como foi observado em três respostas.

Poderá também errar no cálculo numérico e responder a letra b, elevando de maneira incorreta o aumento da aresta, que ao invés de ser $(1{,}2\ a)^3$, eleva (0,2 a) a terceira potência, achando o valor de $0{,}008\ a^3$, que para ele corresponde a 0,8%.

Entretanto, poderá também responder a alternativa c, que ao invés de elevar à terceira potência, desenvolve o princípio aditivo, somando o aumento das três arestas para encontrar o aumento do volume, fato este observado em três protocolos de alunos. Ver figura 3:



Se aumentarmos em 20% (vinte por cento) as arestas de um paralelepípedo retângulo, em quantos por cento o seu volume será aumentado:

a) 20%

b) 0,8%

c) 60%

d) 72,8%

e) OUTROS

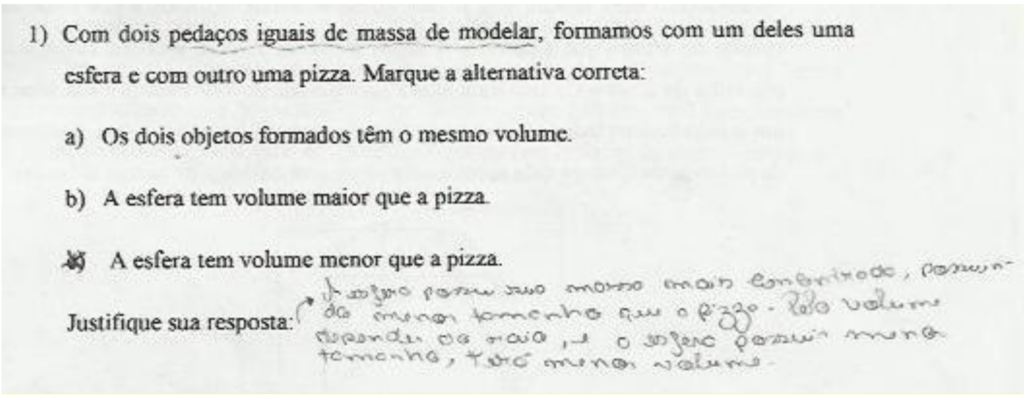
Justifique sua resposta:

20% 20% 20%

3 x 20% = 60%

Figura 3

Situações de comparação e de produção foram as que obtiveram menor índice de acerto. Na questão 1, pede-se ao aluno comparar os volumes de dois objetos (pizza e esfera) formados com a mesma quantidade de massa de modelar. A maioria errou, por mobilizar teoremas-em-ação do tipo: “a esfera por ter raio menor que a pizza , terá menor volume”, ou “a esfera é uma figura espacial e a pizza é uma figura plana, logo a esfera tem volume maior que a pizza”, conforme exemplo abaixo:



1) Com dois pedaços iguais de massa de modelar, formamos com um deles uma esfera e com outro uma pizza. Marque a alternativa correta:

a) Os dois objetos formados têm o mesmo volume.

b) A esfera tem volume maior que a pizza.

c) A esfera tem volume menor que a pizza.

Justifique sua resposta: A esfera possui uma massa mais concentrada, possuindo menor tamanho que a pizza. Pelo volume depender do raio, e a esfera possuir menor tamanho, terá menor volume.

Figura 4

Na questão 6, apenas um aluno respondeu corretamente a produção do sólido de volume menor que o sólido dado, porém um dos que errou o cálculo de volume conseguiu produzir um sólido correspondente ao terço do volume calculado erroneamente, o que leva a crer que este aluno compreende volume como grandeza, pois o mesmo apesar de ter calculado erroneamente o volume do sólido inicial, calculou de maneira correta o volume do sólido pedido, representou corretamente a unidade de medida de volume e representou corretamente o sólido correspondente ao volume calculado, nota-se ainda que o sólido produzido foi diferente do sólido dado na questão, mostrando que o aluno reconhece a independência do volume com a forma do sólido. Ver exemplo a seguir:

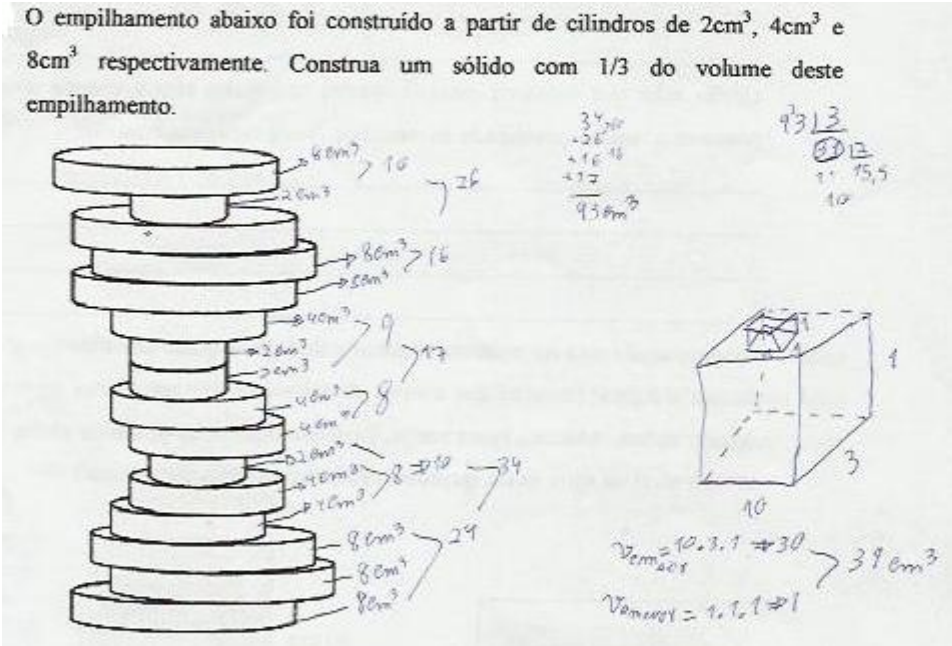


Figura 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste recorte de uma pesquisa em andamento, pudemos observar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990) que a maioria dos alunos do ensino médio testados neste estudo compreende volume como grandeza, diante de situações de medida. Apesar de apresentarem erros consideráveis nas questões, mais relacionados ao cálculo, a maioria representou corretamente a fórmula de volume, sua unidade de medida, desenharam o sólido para auxiliar na resolução da questão, o que dá indícios de que compreendem o significado de volume e que conseguem também realizar corretamente a transferência dos quadros geométrico, numérico e da grandeza.

Porém, diante de outras situações, como transformação de unidades, produção de sólidos e comparação, os alunos tiveram mais dificuldades na resolução, mostrando em alguns casos confusão com outras grandezas como área e comprimento. A maioria não reconhece ou não consegue transformar corretamente a unidade de medida de volume, não consegue produzir o sólido de menor volume que o sólido dado, o que aponta dificuldades na transferência dos quadros geométrico, numérico e da grandeza.

Quanto aos invariantes, o uso da fórmula foi o mais recorrente, sendo usada na maioria das vezes de modo correto, embora em alguns casos ainda exista conflito entre a fórmula da área e a de volume.

A representação do quadro geométrico de volume, a partir do desenho, foi observada nas resoluções, o que mostra a importância da representação para a construção do conceito de volume como grandeza. Nos casos em que o desenho não representava corretamente o sólido da questão, o aluno errava também a fórmula para o cálculo de volume e não representava corretamente a unidade de medida.

Para finalizar, entendemos também serem necessários outros estudos que contemplem estratégias mais variadas, as quais permitirão ter um diagnóstico mais amplo sobre a compreensão do conceito de volume nessa etapa de ensino.

REFERÊNCIAS

ANWANDTER-CUELLAR , N. **Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume.** FRANÇA. 2008. 96f. Dissertação (Mestrado)- Université Montpellier 2. 2008.

BARROS, J. S. de. **Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório.** Dissertação (Mestrado)- Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

LIMA, P, F. BELLEMAIN, P. M. B. Coleção explorando o ensino: **Grandezas e medidas**. Matemática. Brasília, DF: 2010. p. 169-201.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. PNLD 2012 - ***Guia de livros didáticos do ensino médio*** - vol. 2. Brasília: MEC/SEF, 2011.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**.1989. v. 20, n°4, pp.387-424.

OLIVEIRA, G. R. F. **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2002. 135 f. Dissertação (mestrado em educação) – Centro de Educação - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE. 2002.

VERGNAUD, Gérard. **Teoria dos Campos Conceituais.** IN: ANAIS do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: 1990.