Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória através da Leitura e Resolução de Problemas e da Construção de Enunciados

Tereza Raquel Couto de Lima[1]

Dimas Felipe de Miranda[2]

Grupo de discussão GD3 – Educação Matemática no Ensino Médio

RESUMO: Este artigo tem o propósito de analisar alguns resultados apresentados na dissertação de mestrado da primeira autora deste texto, originada a partir de questionamentos da pesquisadora ao lecionar análise combinatória, conforme as diretrizes metodológicas dos livros didáticos adotados. Com o intuito de suavizar as dificuldades encontradas pelos estudantes elaboramos um conjunto de atividades na qual o uso de fórmulas não é privilegiado. Nestas atividades os alunos devem ler, interpretar e resolver problemas, além de criar diversos enunciados para situações problemas. O referencial teórico e metodológico é constituído pela teoria dos registros de representação semiótica, propostas por Raymond Duval; pela teoria das Investigações matemáticas, propostas por João Pedro da Ponte; pela teoria de Resolução de Problemas, de George Polya; e pela teoria de Leitura, Interpretação e Construção de Enunciados, encontrada em Mercedes Carvalho e outros. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de segunda série do Ensino Médio de uma escola estadual de Minas Gerais, no ano de 2010. A coleta de dados se deu por meio de anotações, feitas pela professora pesquisadora e registros produzidos pelos alunos ao longo das aulas. Com esta pesquisa, pudemos verificar que o estudo de análise combinatória, sem a preocupação excessiva com o uso de fórmulas, contribui para o desenvolvimento de habilidades para lidar com os problemas. Ao desenvolver habilidades na criação de enunciados de problemas, os estudantes tornam-se mais autônomos e seguros.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório, resolução de problemas e construção de enunciados.

Introdução

O presente artigo tem o propósito de mostrar alguns resultados apresentados em minha pesquisa de mestrado. A investigação foi conduzida por inquietações sobre o método utilizado pela maioria dos professores que conhecemos e pela observação da abordagem dada nos livros didáticos. Acreditamos que existem diversas formas de se ensinar análise combinatória. No entanto, desejávamos buscar uma que contribuísse para o desenvolvimento do raciocínio combinatório do estudante.

---

[1] Professora de matemática no Instituto Federal Minas Gerais – IFMG Campus Ouro Preto. Mestre em Ensino de Matemática pela PUC-MG. raquel.bq@hotmail.com

[2] Doutor em Tratamento da Informação Espacial pela PUC-MG. Professor no Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. dimasfm48@yahoo.com.br

Em nossa experiência do dia a dia, lecionando matemática, pudemos perceber que existem dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem da análise combinatória, principalmente no que diz respeito à interpretação dos enunciados dos problemas que envolvem esse conteúdo. Alguns alunos não conseguem resolver o problema proposto por não entender muito bem o que foi pedido ou questionado, outros o fazem, mas de maneira equivocada.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) destacam a importância de que o estudo da análise combinatória se dê, inicialmente, através do uso da árvore de possibilidades. Com esse tipo de representação os alunos têm a oportunidade de discutir acerca das soluções encontradas. “A utilização do diagrama de árvores é importante para clarear a conexão entre os experimentos compostos e a combinatória, pois permite que visualizemos a estrutura dos múltiplos passos do experimento” (BRASIL, 2006, p. 79).

No entanto, segundo Elon Lages Lima et al (2006), o que encontramos na maioria dos livros didáticos são fórmulas “miraculosas” que os alunos devem utilizar para resolver certos problemas que envolvem esse tema.

A nossa hipótese é que quando a análise combinatória é estudada de forma intuitiva, os alunos compreendem com mais facilidade o resultado encontrado. Por outro lado, se as fórmulas são apresentadas de forma pronta e acabadas, os alunos ficam sem saber em qual momento deverão utilizar cada uma delas e o ensino da análise combinatória torna-se tecnicista e operacional.

Dessa forma, estipulamos como questão geradora da pesquisa: Que contribuições podem oferecer um conjunto de atividades planejadas, visando o ensino da análise combinatória a partir da exploração de diferentes representações e do enunciado dos problemas?

A nossa hipótese é que para desenvolver o raciocínio combinatório dos estudantes, o ensino e aprendizagem da análise combinatória podem acontecer, inicialmente, através de processos intuitivos. Para Piaget (1995) a formalização de conceitos deve ocorrer em seu próprio tempo e não ser forçada através de constrangimentos prematuros. Portanto, o uso de fórmulas pode acontecer, mas de forma progressiva e a partir da construção de estruturas pelo próprio estudante. Portanto, a fórmula em si não é negativa, mas seu uso é favorecido quando decorre da experiência dos estudantes.

O raciocínio combinatório tem importância tanto no aspecto social na formação de cidadãos, quanto na formação matemática de um indivíduo, tornando-o flexível na utilização de formas para representar ideias matemáticas. Entendemos que o raciocínio combinatório torna o indivíduo capaz de analisar situações, estabelecer padrões, criar estratégias, identificar possibilidades, além de desenvolver seu espírito crítico e argumentativo. Segundo Piaget e Inhelder (1995) o pensamento combinatório tem essencial importância no desenvolvimento e aprendizagem dos estudantes.

Fundamentos Teóricos e Metodológicos

Para a elaboração do conjunto de atividades aplicado se fez necessário o estudo de materiais didáticos disponíveis para se ensinar esse conteúdo no ensino médio. Analisamos alguns livros que são utilizados no Ensino Médio em diversas escolas. Observamos que esses livros dão muita ênfase ao uso de fórmulas. Pesquisas apontam que quando o ensino de análise combinatória se dá sem a preocupação excessiva com fórmulas, os alunos desenvolvem o raciocínio combinatório. Entre essas pesquisas podemos destacar a dissertação de mestrado de Esteves (2001).

Outros textos que deram suporte à pesquisa são: "Semiósis e Pensamento Humano" (DUVAL, 2009); "Investigações Matemáticas na Sala de Aula" (PONTE et al, 2006), "A arte de resolver problemas" (POLYA, 1975), "Problemas? Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula" (CARVALHO, 2005) e "Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática" (org: Smole e Diniz, 2001).

Duval (2009) explora o fato de que os objetos matemáticos, por serem abstratos, necessitam de uma mediação para se tornarem acessíveis ao sujeito. Dessa forma, é necessária a utilização de representações como registros algébricos, diagramas, esquemas, entre outras. Essas representações são denominadas representações semióticas.

Segundo o autor, a distinção entre o objeto matemático e sua representação é de extrema relevância para o funcionamento cognitivo. Ora, um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. Duval (2009) diz que toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão.

A originalidade da atividade matemática está para Duval (2009) na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de fazer a troca a todo o momento de registros de representação. No entanto, tal coordenação não é adquirida naturalmente pelo estudante durante o processo de ensino e aprendizagem, cabendo, então, ações que possam articular os diferentes registros de um mesmo objeto.

Segundo Duval (2003), existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são completamente diferentes: os tratamentos e as conversões.

> - Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p. 16).

Para o pesquisador, do ponto de vista matemático, a conversão intervém apenas na escolha do registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou na obtenção de um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Do ponto de vista cognitivo, segundo Duval (2003) a conversão tem um caráter fundamental, pois é ela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

A transformação por conversão de registros de representação envolve o fato de os alunos não conseguirem perceber o mesmo objeto, quando esse é explorado em mais de uma representação. De acordo com Duval (2009), para trabalhar a conversão, é necessário que o estudante saiba transitar entre os diversos tipos de registros.

Tal teoria teve papel importante em nossa pesquisa, já que queríamos que os estudantes utilizassem registros variados para solucionar os problemas propostos. O trabalho com diversas formas de representação semiótica pode proporcionar aos estudantes habilidades na utilização desses registros e facilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

A teoria de investigações matemáticas foi utilizada como suporte para a elaboração e escolha das atividades da pesquisa, bem como para seu desenvolvimento em sala de aula. A aplicação das atividades escolhidas foi pautada no incentivo à investigação e às testagens de resultados; já que sabemos que para haver uma aprendizagem verdadeira o estudante precisa buscar o próprio conhecimento, descobrir e reinventar a matemática.

Segundo Ponte et al (2003) a investigação matemática pode ser usada como recurso, quando os estudantes se interessam por questões formuladas que não têm respostas prontas. Dessa forma, o educando deve buscar entender o problema e investigar o assunto de forma organizada, a fim de encontrar uma solução que possa validar a questão.

Um bom problema matemático é aquele que abre um “leque” à nossa frente. Ao tentar resolvê-lo nos deparamos com diversas descobertas, que podem se revelar muito importantes. Mesmo quando não conseguimos chegar a uma solução que valide o problema, o trabalho ainda assim não deixa de ter valido a pena pelas descobertas e desafios que nos proporciona.

A distinção entre exercício e problema foi formulada por Polya (1944). Segundo ele, um problema é uma questão para a qual o estudante não dispõe de um método ou algoritmo que permita a sua resolução imediata, enquanto um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. Já Onuchic (1999) diz que problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.

Além de desafio, a resolução de problemas é descobrimento, uma vez que não existe um método rígido do qual o aluno sempre deverá dispor para encontrar a solução de uma situação. No entanto, Polya (1945) afirma que existem passos do pensamento que podem auxiliar o estudante no processo de resolução de problemas, são eles: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Os PCN`s (1998) orientam que a resolução de problemas é uma estratégia muito importante a ser utilizada no ensino de matemática. “Os alunos desenvolvem estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos” (BRASIL, 1998, p. 266).

Segundo Carvalho (2005), ao terminar de fazer a leitura do enunciado os alunos perguntam automaticamente: “É conta de quê?” ou “Qual fórmula devo utilizar?” ou então buscam no texto palavras que indiquem qual procedimento deverá ser efetuado, as chamadas palavras-chave. Ao procurar uma palavra-chave no enunciado, o estudante pode encontrar dificuldades e cair em armadilhas, já que estes textos matemáticos podem trazer ambiguidades linguísticas e, consequentemente, possibilitar a compreensão de um mesmo problema, raciocinando de várias formas diferentes.

A metodologia de resolução de problemas contribuiu significativamente para nossa pesquisa. Alguns problemas, apesar de simples, desafiaram a curiosidade dos estudantes, que buscavam a solução por seus próprios meios, já que os mesmos não possuíam um método ou algoritmo preestabelecido. Os alunos tiveram a oportunidade de experimentar e poder sentir o gosto da descoberta.

Outra proposta do nosso trabalho foi estimular os estudantes a se tornarem indivíduos capazes de ler, interpretar, resolver e, posteriormente, de construir corretamente enunciados de situações problemas que envolvem análise combinatória.

Segundo Cândido (2001) a comunicação ainda é pouco incentivada em muitas aulas de matemática. Segundo o autor, quanto mais oportunidade o estudante tem de refletir sobre um assunto, falar, escrever ou representar, mais ele o compreende. A comunicação, por sua vez, também será cada vez mais acentuada e objetiva à medida que o estudante compreender melhor o que está querendo expressar. É fato que a comunicação ajuda a esclarecer ideias e organizar pensamentos, facilitando a apropriação de conhecimentos e a desenvoltura de habilidades específicas.

Segundo Smole (2001), não podemos dizer que as dificuldades que os alunos têm em ler e interpretar um problema ou exercício de matemática está ligada exclusivamente à pouca habilidade com a leitura de forma geral. Especificamente, na escrita matemática, identificamos como característica uma combinação de sinais, letras e palavras que se organizam, seguindo certas regras, para expressar ideias. É importante que os alunos aprendam a ler matemática, a fim de encontrar sentido no que leem.

Segundo Carvalho (2005) a dificuldade que os estudantes encontram em ler e interpretar textos de enunciados de situações problemas de matemática está, entre outros fatores, ligada à ausência de um trabalho específico com o texto de problemas.

Smole e Diniz (2001) dizem que há diversos meios a serem utilizados para que os alunos desenvolvam habilidades de interpretação de problemas. Um desses recursos é apresentar uma situação problema para os educandos e pedir que eles façam uma leitura cuidadosa do texto. Primeiro pode ser feita a leitura completa do texto, para que os aprendizes tenham uma ideia do problema como um todo, depois o problema pode ser lido de forma mais vagarosa a fim de que o estudante possa perceber as palavras do texto, sua grafia e seu significado. Pode-se também, fazer questionamentos acerca do problema proposto, como se fosse um texto qualquer, e pedir que os estudantes narrem o problema novamente com suas palavras.

Outra proposta desta pesquisa, apresentada na sequência de atividades, é dar oportunidade aos estudantes de construção de enunciados. Acreditamos que dessa forma, a interpretação de situações problema se dê com maior facilidade.

Segundo Carvalho (2005) a construção de enunciados pelos alunos favorece a oportunidade de investigação e de desenvolvimento do pensar matemático, além de estimular competências de leitura, escrita, interpretação e produção de textos. Essa atividade contribui também para que o estudante se sinta único e capaz de criar situações problemas tão interessantes quanto as propostas pelos livros didáticos. Apesar de o conteúdo do trabalho de Carvalho (2005) ser voltado para os primeiros anos do Ensino Fundamental, percebe-se que essa metodologia pode ser estendida e gerar contribuições a todos os níveis de ensino.

Segundo Chica (2001), quando o estudante cria seus próprios enunciados de problemas, precisa organizar tudo o que sabe para que possa comunicar o que pretende ao elaborar o texto. Assim, os estudantes escrevem e podem perceber o que é importante na elaboração e resolução de problemas. A elaboração de textos de problemas precisa ser vista como uma tarefa desafiadora em que alunos precisam ser estimulados e ter a possibilidade de questionar e comunicar ideias.

Desenvolvimento das atividades e resultados

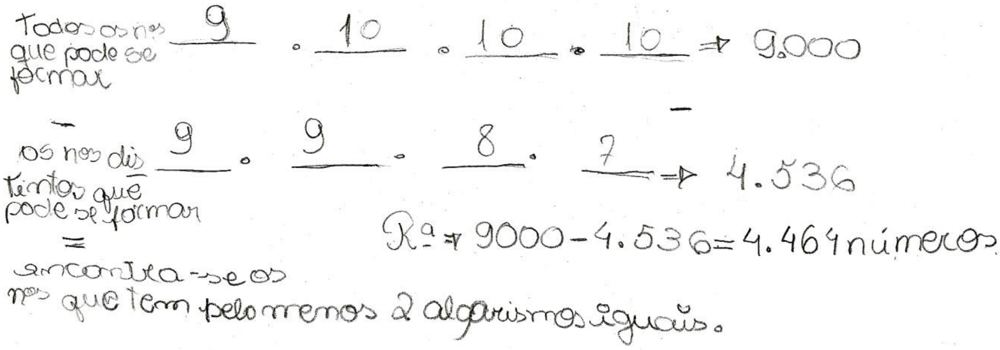
A investigação foi desenvolvida com estudantes da 2ª série do Ensino Médio e realizada em consonância com a abordagem da pesquisa qualitativa de Ludke e André (1986). Desenvolvemos as atividades durante o mês de agosto de 2010, em uma escola estadual que oferece Ensino Fundamental e Médio, localizada em Barbacena, cidade do interior de Minas Gerais.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, um conjunto de atividades sobre o estudo de análise combinatória foi organizado. No entanto, neste artigo, destacamos somente três atividades para que o leitor possa refletir sobre o uso de metodologias em que as fórmulas não são privilegiadas e em que o estudante é estimulado a ler, resolver e escrever problemas que envolvem este conteúdo. O leitor poderá ter acesso à pesquisa completa[3] no site da biblioteca digital da PUC Minas. Durante a realização das atividades pelos alunos, foram observadas as iniciativas de investigação e das habilidades com resolução de problemas. As atividades foram realizadas visando desenvolver a autonomia dos estudantes.

O problema a seguir, Figura 01, foi caracterizado como um desafio, já que acreditávamos que não se tratava de uma atividade simples: “Quantos números pares de 4 algarismos que possuem pelo menos dois algarismos iguais?” No entanto, fomos

[3]www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_LimaTRC_1.pdf ou http://goo.gl/mal3n

surpreendidos por uma estudante que resolveu a atividade de forma bastante simples e explicativa. A aluna resolveu e comentou o problema:


Todos os nºs que pode se formar 9 . 10 . 10 . 10 ⇒ 9.000

os nºs distintos que pode se formar 9 . 9 . 8 . 7 ⇒ 4.536

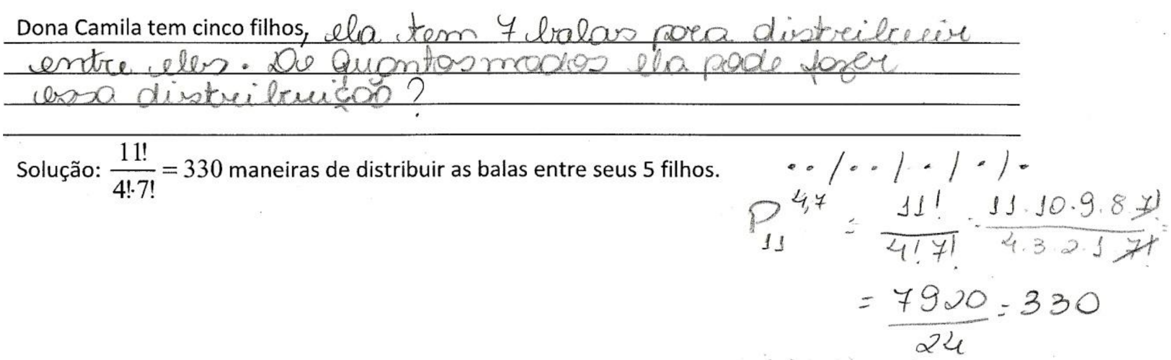
= encontra-se os nºs que tem pelo menos 2 algarismos iguais.

Rª ⇒ 9000 − 4.536 = 4.464 números

Figura1: Protocolo extraído do caderno de atividades da aluna C
Fonte: Dados da pesquisa, 2010

A aluna, inicialmente, determinou a quantidade de números naturais de quatro algarismos existentes e, a seguir, verificou quantos desses possuíam todos os algarismos distintos. Finalmente, atendendo ao que foi pedido pelo problema, calculou a diferença entre os valores encontrados. Após resolver individualmente a questão, a aluna ajudou seu grupo a solucioná-la. Para chegar à solução do problema, a estudante utilizou a criatividade e a investigação, preconizadas por Ponte et al (2006), ao ser exposta a desafios em sala de aula. Esta teoria diz que o aluno que investiga, experimenta o fazer matemática. Pudemos observar claramente que a aluna também utilizou os quatro passos propostos por Polya (1975) para resolução de problemas: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano e, finalmente, fazer o retrospecto. Observamos que essa atividade auxilia no desenvolvimento de habilidades com resolução problemas que envolvem análise combinatória e torna os alunos indivíduos mais autônomos.

Pedimos, Figura 02, que os estudantes completassem o enunciado de um problema, cuja introdução e solução foram dadas.


Dona Camila tem cinco filhos, ela tem 7 balas para distribuir entre eles. De quantos modos ela pode fazer essa distribuição?

Solução: $\frac{11!}{4!\cdot 7!}$ = 330 maneiras de distribuir as balas entre seus 5 filhos.

••/••/•/•/•

$P_{11}^{4,7} = \frac{11!}{4!7!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7!} = \frac{7920}{24} = 330$

Figura 2: Protocolo extraído do caderno de atividades do aluno A
Fonte: Dados da pesquisa, 2010

Verificamos, ao longo da pesquisa, que os estudantes ganharam desenvoltura como criadores de textos matemáticos. A Figura 2 revela que o aluno criou um enunciado para um problema que tinha uma solução preestabelecida, e resolveu a situação criada para confirmar o resultado. A autonomia e a capacidade de criar enunciados bem elaborados foram notáveis, demonstrando ganho de conhecimento e autoconfiança. À medida que construíam enunciados, iam perdendo o medo de errar e trabalhando a autoestima.

Observa-se, na Figura 02, que o estudante utilizou diversos registros de representação para resolver este problema. Utilizou o esquema figural com as bolinhas e barras ao representar a divisão das balas para as crianças. Esse esquema já havia sido utilizado em outras atividades e foi uma sugestão da professora. O aluno utilizou também a linguagem simbólica e a linguagem numérica. Percebemos ainda que o estudante utilizou diversas transformações para os registros de representação. Inicialmente, transformou o esquema figural em uma linguagem simbólica $P_{11}^{4,7}$. Depois o estudante converteu essa linguagem em uma operação e utilizou a notação fatorial para representá-la. Depois disso, ele transformou essa notação fatorial em linguagem simbólico-numérica, dada por operações matemáticas. Todos esses passos seguidos pelo aluno representam, segundo Duval (2003), conversão de representações e mudança de registros. Duval (2009) diz que converter é transformar a representação de um objeto de dado registro em uma representação desse mesmo objeto, num outro registro. Segundo Duval (2009) essas transformações são essenciais para que haja um aprendizado significativo em matemática. Além disso, o aluno utilizou o que Duval (2003) chama de tratamento ao efetuar os cálculos e encontrar como resposta o número 330. Os alunos utilizaram recursos aprendidos em aulas anteriores para conseguir resolver essa atividade.

Na atividade a seguir deveriam criar um texto para um problema com solução dada:

Crie um enunciado para ilustrar a situação dada abaixo.

De quantas maneiras diferentes podemos fazer um salpicão dispondo de 7 legumes, utilizando apenas de 3 delas ?

Solução: $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

Figura 3: Protocolo extraído do caderno de atividades do aluno P
Fonte: Dados da pesquisa, 2010

Pudemos perceber que quando o aluno tinha a oportunidade de formular problemas, ele se empenhava a pensar na situação problema como um todo, e não só nos números. Havia também uma preocupação em dar sentido ao problema criado. Dessa forma, o estudante familiarizou-se e compreendeu melhor as características dos problemas.

Segundo Carvalho (2005) a construção de enunciados favorece a oportunidade de investigação e de desenvolvimento do pensar matemático, além de desenvolver competências de leitura, escrita, interpretação e produção de textos. Assim, constatamos que dando a oportunidade de os alunos construírem enunciados, estamos estimulando o desenvolvimento do pensar matemático.

Acreditamos que o trabalho intuitivo contribui para o desenvolvimento de uma atitude reflexiva. Dessa forma, o aluno se torna um individuo mais autônomo.

Tentamos estimular o uso das estratégias propostas por Polya (1945) como forma de auxiliar os estudantes a resolver os problemas de forma mais organizada. Buscamos incentivar a construção de textos matemáticos a fim de favorecer a oportunidade de investigação e o desenvolvimento do pensar matemático, além de desenvolver competências de leitura, escrita e produção de textos.

Considerações finais

Procuramos verificar de que forma podemos conduzir o ensino da análise combinatória através de um conjunto de atividades, a fim de facilitar o ensino e aprendizagem do conteúdo. Queríamos que os estudantes desenvolvessem o raciocínio combinatório e suas habilidades com resolução de problemas que envolvem a temática.

Diante da análise de diversos materiais, escolhemos os problemas que iriam compor nosso conjunto de atividades. Utilizamos algumas atividades inéditas e outros problemas clássicos que envolvem o tema. Os estudantes tiveram a oportunidade de experimentar metodologias como a resolução de problemas e a construção de enunciados. Buscamos submeter muitos desses problemas a técnicas organizadas de resolução de problemas.

Acreditamos que os quatro passos propostos por Polya (1945) podem auxiliar o estudante a resolver os problemas de forma organizada. Tentamos estimular essa prática em sala de aula. Outra estratégia de ensino utilizada foi o desenvolvimento de um trabalho intuitivo na apresentação do conteúdo análise combinatória. Os alunos desenvolviam os primeiros problemas com a enumeração das possibilidades e o uso da árvore de possibilidades. Percebemos que através da contagem direta os estudantes desenvolvem gradativamente o raciocínio combinatório, interpretando, elaborando estratégias e encontrando soluções para as atividades propostas.

Os resultados apresentados evidenciaram a participação dos alunos na construção do próprio conhecimento, à medida que buscavam estratégias para resolver os problemas propostos.

Em consonância com a proposta de Ponte et al (1991) e com o objetivo de explorar o trabalho intuitivo, o conjunto de atividades foi realizado de forma a privilegiar os métodos de investigação matemática. Procuramos deixar a escolha do método de resolução das atividades a cargo dos alunos. Dessa forma, acreditamos que estamos contribuindo para o desenvolvimento de uma atitude reflexiva e para a autonomia do estudante.

Nesse trabalho procuramos destacar a importância do uso de diferentes registros de representação semiótica no estudo da análise combinatória, tendo por base a teoria de Duval (2009). Concluímos que ao experimentar registros variados privilegia-se o desenvolvimento do raciocínio combinatório no aluno. Além disso, verificamos que as transformações de representações semióticas dão aos estudantes uma melhor compreensão do conteúdo.

Os estudantes adquiriram certa facilidade em coordenar registros variados de representação. À medida que resolviam os problemas propostos pela sequência de atividades, os alunos foram se habituando ao uso de diferentes registros e suas transformações, quando um registro mostrava ser mais eficiente do que outro.

Outra estratégia empreendida nesta pesquisa foi a proposta de atividades onde os estudantes deveriam criar seus próprios enunciados. Procuramos encorajar os alunos a explorar suas ideias. A atividade de construção de enunciados favoreceu a oportunidade de investigação e o desenvolvimento do pensar matemático, além de ter desenvolvido competências de leitura, escrita e produção de textos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** V. 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC. Secretária de Educação Básica, 2006.

CÂNDIDO, Patrícia T. Comunicação em matemática. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. Cap. 1, p. 15-28.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula.** Petrópolis: Vozes, 2005. 70 p.

CHICA, Cristiane H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. Cap. 8, p. 151-173.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. D. A. Machado (Org), **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003. (Coleção Papirus Educação). Cap. 1, p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais.** (Fascículo I). São Paulo. Editora Livraria da Física, 2009.

ESTEVES, Inês. **Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8ª série do Ensino Fundamental.** 2001, 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo C. Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio.** Volume 2. 6ª edição. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas.** São Paulo: EPU, 1986.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, S. G. Ensino-aprendizagem de Matemática através da
PALANGANA, I. P.; **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky:** a relevância do social. Summus Editorial. 1999

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. (1991). **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 2003. Coleção Tendências em Educação Matemática. Editora Autêntica.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1944.

SMOLE, Kátia C. S. Textos em matemática: por que não? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. Cap. 2, p. 29-68.