

# **Aspectos do Pensamento Algébrico Evidenciados por Estudantes do 6º Ano em Resoluções de Problemas Não-Rotineiros**

Edilaine Pereira da Silva<sup>1</sup>

Angela Marta Pereira das Dores Savioli<sup>2</sup>

**GD1** – Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

**Resumo:** O objetivo da pesquisa apresentada neste trabalho é identificar aspectos de pensamento algébrico em resoluções de problemas não rotineiros por estudantes de um 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública. A metodologia se deu à luz do experimento de ensino. Os dados coletados consistiram em diálogos estabelecidos durante os episódios de ensino e registros escritos das resoluções dos estudantes dos problemas aplicados. As análises serão realizadas à luz do método da Análise de Conteúdo. Realizado o levantamento bibliográfico e os procedimentos de coleta de dados a pesquisa encontra-se em fase de análise dos dados.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Problemas Não-rotineiros. Pensamento Algébrico.

## **Introdução**

Buscando uma reflexão a respeito do pensar algebricamente, fizemos um levantamento bibliográfico encontrando vários artigos que abordam o tema, entre eles: BRIZUELA, CARRAHER e SCHLIEMANN (1998, 2000, 2001), que tratam de crianças das séries iniciais resolvendo problemas de álgebra, das notações como suporte para o raciocínio algébrico e de como as crianças operam com desconhecidos; BRIZUELA (2006), que trata do desenvolvimento matemático na criança; KIERAN (1994, 2001, 2004, 2007) que aborda temas como os significados dos símbolos algébricos, atividade algébrica e pensamento algébrico nas séries iniciais; KAPUT (1991); PONTE et. al. (2009);

---

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós Graduação de Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL, edi.laines@hotmail.com

<sup>2</sup> Professora Doutora da Universidade Estadual de Londrina, angela@uel.br

USISKIN (1984), que trata de concepções de álgebra; BOOTH (1989), que pesquisou sobre as dificuldades de crianças que se iniciam em álgebra; THOMPSON (1989); FIORENTINI, MIGUEL E MIORIN (1993), que aborda concepções de álgebra; FIORENTINI, FERNANDES E CRISTÓVÃO (2004), que apresenta caracterizações do pensamento algébrico; SFARD (1991); SFARD E LYNCHVISKIN (1991, 1994); LEW (2004); LINS E GIMENEZ (1997).

Dentre esses, destacamos os estudos de BOOTH (1989) e KIERAN (1994), os quais discutiram as dificuldades que os estudantes apresentam quando são iniciados em álgebra verificando que as causas dessas dificuldades podem ser explicadas por atribuírem significados operacionais aos símbolos decorrentes de suas experiências em aritmética e de não terem ainda desenvolvido uma concepção estrutural. Outros trabalhos, como CARRAHER, SCHLIEMANN, BRIZUELA (2007) afirmam que estudantes das séries iniciais aprendem conceitos algébricos. Dessa forma, concordamos com alguns autores que o pensamento algébrico é anterior a aprendizagem da linguagem simbólica e que aos estudantes das séries iniciais podem ser dadas oportunidades de experienciar a atividade algébrica desenvolvendo o pensamento algébrico.

A partir dessas leituras, direcionamos a pesquisa ao 6º ano do ensino fundamental porque tínhamos a intenção de trabalhar com estudantes que ainda não tivessem tido uma experiência com a linguagem algébrica simbólica, a qual está prevista no currículo para o 7º ano.

### **Justificativa**

No ensino de álgebra, quando as concepções de educação algébrica acabaram por enfatizar a linguagem simbólica, evidenciou-se uma crença de que “o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da álgebra” (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIN, 1993, p. 85). A álgebra como uma maneira de pensar envolve formas de aprender e de ensinar que diferem das abordagens de ensino em que a linguagem é o foco principal, identificadas por Fiorentini, Miguel e Miorin (1993) uma vez que, de acordo com esses autores, entre pensamento algébrico e linguagem deva existir uma relação dialética.

Ainda no que se refere a questões envolvendo o ensino e aprendizagem de álgebra, pesquisas apontam que algumas dificuldades que os estudantes apresentam em álgebra são decorrentes da atribuição de significado aritmético para os símbolos levando-os a realizarem processos aritméticos em expressões algébricas. Em geral, realizam processos não pertinentes em expressões literais, entendendo o sinal de mais ou de menos como operadores e não compreendem o sinal de igual como um símbolo relacional (BOOTH, 1989; KIERAN, 1981). Essas dificuldades se mostram relacionadas a um currículo que se volta apenas para aritmética nas séries iniciais. O ensino de aritmética tem levado estudantes a apresentar um pensamento aritmético mesmo quando lidam com a linguagem simbólica.

Diante desses fatos envolvendo o ensino e aprendizagem de álgebra e considerando que aritmética é ensinada antes da álgebra, corroboramos com autores que discutem a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries iniciais de forma que aritmética e álgebra “desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 10).

Assim, a presente pesquisa tem como foco identificar os aspectos de pensamento algébrico em um nível elementar de forma a trazer contribuições para o ensino e aprendizagem de álgebra. Os resultados dessa pesquisa poderão oferecer subsídios para novas abordagens de ensino de matemática tanto em séries iniciais como para os anos finais do ensino fundamental.

### **Questão Investigativa**

Que aspectos de pensamento algébrico podem ser manifestados por estudantes de um 6º ano do ensino fundamental ao resolverem questões não rotineiras?

### **Objetivos**

Identificar que aspectos do pensamento algébrico são manifestados por estudantes do sexto ano em tarefas não rotineiras.

## Fundamentação Teórica

Pesquisadores como Booth (1989) e Kieran (1981) têm apontado que algumas dificuldades que os estudantes apresentam em álgebra são decorrentes da atribuição de significado aritmético para os símbolos levando-os a realizarem processos aritméticos em expressões algébricas. De acordo Booth (1989) estudantes da oitava até a décima série tendem a dar respostas particulares quando deveriam responder de forma mais geral, não aceitam expressões algébricas como procedimento e resposta ao mesmo tempo, tendendo a reduzi-las a um único termo, entendem que o sinal + significa efetivamente realizar a operação e o sinal = significa dar a resposta, apresentam dificuldades em atribuir significados às letras e tendem a atribuir valores específicos únicos para as letras mesmo quando estas se apresentam como variáveis. Kieran (1992) discute os pensamentos desenvolvidos por estudantes no ensino tradicional de aritmética e afirma que há a necessidade de ajustes para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Isso se verifica, por exemplo, quando os estudantes tratam o sinal de igual como um indicador da resposta, consistindo em algo que separa o problema da solução (KIERAN, 1992). Para Carraher e Schliemann (2007, p.671) “uma profunda compreensão da aritmética, por exemplo, requer generalizações matemáticas que são algébricas na sua natureza.”<sup>3</sup> Dessa forma, entendemos que o ensino de aritmética nas séries iniciais deva oportunizar experiências que levem os estudantes a pensar nos números e operações para além de um ensino voltado para o cálculo e para respostas particulares.

De acordo com Kieran (2004, p. 149), o pensamento algébrico nas séries iniciais envolve

[...] o desenvolvimento de formas de pensar no âmbito das atividades para as quais a linguagem simbólica pode ser usada como uma ferramenta, mas que não são exclusivas para álgebra e com as quais podem se envolver sem usar qualquer linguagem simbólica, tais como analisar relações entre quantidades, observar a estrutura, estudar variações, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar,

---

<sup>3</sup> “A deep understanding of arithmetic, for example, requires mathematical generalizations that are algebraic in nature.” (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007, p.671)

provar e prever.<sup>4</sup>

Assim, álgebra nas séries iniciais é entendida como uma maneira de pensar. Introduzir estudantes das séries iniciais em experiências que oportunizem o desenvolvimento do pensamento algébrico consiste em lidar com incógnitas, variáveis e parâmetros ao resolver, bem como equivalências e relações sem que necessariamente recorram a uma linguagem simbólica. Além disso, podem pensar em números com base em propriedades e não apenas em resultados particulares. Para expressar esse pensamento podem usar uma linguagem verbal ou mesmo uma linguagem aritmética bem como outras representações.

Fiorentini, Cristóvão e Fernandes (2005, p.5) apresentam alguns elementos caracterizadores de pensamento algébrico anterior à linguagem simbólica, quando a criança

[...] estabelece relações/comparações entre expressões numéricas ou padrões geométricos; percebe e tenta expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema; produz mais de um modelo aritmético para uma mesma situação-problema; ou, reciprocamente, produz vários significados para uma mesma expressão numérica; interpreta uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas; transforma uma expressão aritmética em outra mais simples; desenvolve algum tipo de processo de generalização; percebe e tenta expressar regularidades ou invariâncias; desenvolve/cria uma linguagem mais concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente...

Os autores evidenciam situações em que os estudantes lidam com objetos da álgebra como equivalências e relações em que é necessário trabalhar com variáveis e incógnitas ou mesmo com expressões aritméticas com foco nas estruturas e não no cálculo de uma resposta particular. Um problema que formalmente representamos por equações pode ser resolvido por estudantes que não conhecem a linguagem simbólica por meio de outros métodos.

Alguns autores têm evidenciado alguns processos do pensamento matemático necessários para atividade algébrica. Kieran (2004) identifica um grupo e atividade algébrica que se refere a atividades mais gerais do pensamento matemático, para

---

<sup>4</sup> “Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analyzing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting.” (KIERAN, 2004, p. 149)

as quais a álgebra é usada como ferramenta, mas que não são exclusivas da álgebra como por exemplo, modelar, justificar, generalizar. Lew (2004) afirma que a aprendizagem de álgebra está associada ao desenvolvimento de no mínimo seis habilidades que são: a generalização, a abstração, o pensamento dinâmico, o pensamento analítico, a modelagem e a organização. Lew (2004) apresenta alguns objetivos específicos do ensino em séries iniciais com relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico e relaciona com habilidades mencionadas, conforme o quadro 1.

**Quadro 1. Objetivos de desenvolvimento do pensamento algébrico em um nível elementar**

Pensamento Algébrico	Objetivos Específicos
	Reconhecer padrões e relações de seqüências de números e figuras
	Resolver problemas usando padrões descobertos
	Resolver problemas usando de simplificação
	Compreender conceitos matemáticos e propriedades
	Usar símbolos relacionados com os conceitos e propriedades
	Atividades operacionais com símbolos abstratos
	Resolver equações por métodos intuitivos
	Resolver equações por operações inversas
	Resolver problemas usando um trabalho de volta.
	Separar um número em várias formas e reagrupá-lo
	Resolver problemas usando uma estratégia de tentativa e erro
	Identificar relações entre dois conjuntos de objetos variáveis.
	Resolver problemas usando uma proporcionalidade direta
	Fazer uma estória relacionada com uma expressão dada
	Fazer um problema relacionado a uma expressão dada
	Representar um problema usando uma expressão adequada
	Modelar uma situação usando um diagrama ou uma figura
	Classificar
	Resolver problema fazendo uma tabela
	Resolver problema usando uma estratégia de dedução lógica

Fonte: Adaptado de Lew (2004, p.95)

Assim, consideramos para as análises que o pensamento algébrico em crianças que ainda não experienciaram álgebra formal consiste em apresentar aspectos do pensamento matemático para lidar com ideias e conceitos algébricos. Esses aspectos, mais

específicos, se relacionam com habilidades como generalização, abstração, pensamento analítico, pensamento dinâmico, modelagem e organização. Os aspectos de pensamento algébrico consistem em evidências de que os estudantes se utilizam de habilidades para lidar com problemas que envolvem conceitos algébricos utilizando qualquer tipo de linguagem para se expressar.

### **Encaminhamentos Metodológicos**

Para atingir nosso objetivo de pesquisa, selecionamos alguns problemas não rotineiros que envolvem ideias algébricas. Entendemos problemas não rotineiros no mesmo sentido que Malone et. al. (1997, p. 283) uma vez que

[...] ao tentar resolver um desses problemas o aluno não saiba a resposta e nem conheça um procedimento previamente estabelecido para achá-la. [...] tais problemas são diferentes de exercícios ou problemas transformados em rotina pelo contexto em que ocorrem; por exemplo, as instruções que precedem imediatamente muitos problemas de textos matemáticos escolares tornam-nos rotineiros.

Os problemas escolhidos para a pesquisa serão definidos como problemas não rotineiros por não consistirem em exercícios de rotina ou problemas conhecidos pelos estudantes, podendo envolvê-los em experiências de raciocinar e desenvolver novas estratégias. Além disso, envolvem alguma ideia ou conceito algébrico, de forma que os estudantes pudessem ter oportunidades de manifestar o pensamento algébrico ao resolvê-los.

Os primeiros trabalhos a campo se iniciaram no ano de 2011 em uma turma de 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública do município de Palotina no Estado do Paraná. Escolhemos o 6º ano, pois pretendíamos trabalhar com estudantes que ainda não haviam recebido instrução de álgebra formalmente. Aplicamos alguns problemas selecionados das Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas - OBMEP – a fim de buscar aspectos de pensamento algébrico nas resoluções desses estudantes. Nessa etapa foram realizadas observações e foi possível averiguar algumas peculiaridades da turma com relação a seus conhecimentos de matemática. Esta foi a primeira etapa da pesquisa a que chamaremos de investigação “piloto”. Na segunda etapa, a coleta de dados foi feita à luz do

experimento de ensino, metodologia de pesquisa qualitativa devida a Steffe e Thompson (2000), destacando alguns momentos importantes das aulas que chamaremos de episódios de ensino, incluindo diálogos estabelecidos entre os estudantes e o pesquisador e os registros escritos dos estudantes na resolução dos problemas.

Os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa apresentam as características da pesquisa qualitativa descritas por Bogdan e Biklen (1991). O ambiente natural dos estudantes em sua rotina de aprendizagem constituiu a nossa fonte de dados onde o pesquisador esteve presente e fazendo parte do grupo.

As atitudes, diálogos, olhares dos observados bem como o ambiente em que estavam foram descritos. Além disso, algumas informações sobre os sujeitos da pesquisa e sobre a escola foram obtidas junto a equipe pedagógica. Essas informações poderiam ser pistas não só para responder nossa pergunta inicial, uma vez que a metodologia de pesquisa de caráter qualitativo permite evidenciar fenômenos a partir dos dados ampliando as possibilidades de contribuições para a pesquisa, para a área de Educação Matemática e de forma geral para a Educação, considerando que “os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (BOGDAN e BIKLEN, 1991, p. 49).

Na investigação piloto os problemas não rotineiros foram aplicados sem intervenção do pesquisador. Havia uma resistência por parte dos estudantes em deixar registros no papel. Os estudantes consideraram as questões difíceis e apresentaram problemas conceituais com frações equivalentes, áreas de superfícies planas e simbologia. Por exemplo, o sinal de igual era utilizado para dar a resposta do problema. Alguns grupos de estudantes apenas evidenciaram uma estratégia de resolução para cada problema, contudo outros grupos realizaram várias tentativas, se aproximando da solução. Os estudantes apresentaram dificuldades em aritmética e na compreensão dos problemas.

Demos continuidade às investigações com a mesma turma da primeira etapa da pesquisa. Dessa vez por uma metodologia à luz do Experimento de Ensino. De acordo com Steffe e Thompson (2000, p.267) “um objetivo principal para a utilização da metodologia do experimento de ensino é para os pesquisadores experimentar, em primeira



mão, a aprendizagem matemática e o raciocínio dos estudantes”<sup>5</sup>. Nossa intenção era de colocar esses estudantes diante de situações problemas envolvendo idéias algébricas e perceber suas maneiras próprias de lidar antes de receberem a instrução de álgebra a fim de identificar que aspectos de pensamento algébrico esses estudantes manifestam. Os problemas dessa segunda etapa estimulavam os estudantes a mostrarem seus cálculos com desenhos ou representações.

O experimento de Ensino é uma metodologia essencialmente qualitativa que se embasa em considerações de que os estudantes constroem conceitos e operações matemáticas independentemente de nossas interações com eles e que esses conceitos e operações podem ser diferentes das formas convencionais ou de formas conhecidas pelo pesquisador. Assim ao escolher essa opção metodológica partimos de uma distinção entre a matemática dos estudantes e a nossa matemática uma vez que os estudantes podem apresentar uma realidade diferente da nossa e consideramos que a nossa realidade matemática consensual não é única. De acordo com Steffe e Thompson (2000, p. 268) “Matemática dos estudantes é indicada por o que dizem e fazem, como se envolvem em atividade matemática, e um objetivo básico dos pesquisadores em um experimento de ensino é construir modelos de matemática dos estudantes”.<sup>6</sup> O experimento de ensino ocorre em uma seqüência de episódios de ensino que devem apresentar alguns elementos metodológicos incluindo um agente de ensino, uma testemunha e um método de gravação. Os episódios são planejados previamente às aplicações e os registros e gravações de um episódio podem servir na preparação de episódios futuros bem como na realização da análise conceitual que visa “encontrar motivos racionais para o que os estudantes dizem e fazem”<sup>7</sup> (STEFFE e THOMPSON, 2000, p. 269).

No quadro 1 apresentamos o cronograma dos episódios de ensino.

## **Quadro 2. Cronograma do experimento de ensino**

Episódios	Data	Duração	Encaminhamentos
-----------	------	---------	-----------------

<sup>5</sup> “A primary purpose for using teaching experiment methodology is for researchers to experience, firsthand, students’<sup>2</sup> mathematical learning e reasoning.” (STEFFE e THOMPSON, 2000, p. 267)

<sup>6</sup> “Students’ mathematics is indicated by what they say do as they engage in mathematical activity, and a basic goal of the researchers in a teaching experiment is to construct models of students’ mathematics.” (STEFFE e THOMPSON, 2000, p. 268)

<sup>7</sup> “...we can find rational grounds for what students say and do.” (STEFFE e THOMPSON, 2000, p. 269)

1	17/02/2012	1 hora-aula	Aplicação das tarefas 1 e 2
2	23/02/2012	1 hora-aula	Discussão das tarefas 1 e 2 Iniciamos a aplicação da tarefa 3
3	24/02/2012	1 hora-aula	Aplicação da tarefa 3 e 4
4	27/02/2012	1 hora-aula	Discussão da tarefa 3 e 4
5	28/02/2012	1 hora-aula	Aplicação da tarefa 5
6	01/03/2012	1 hora-aula	Construindo uma tabela para a tarefa 5 Responderam um questionário de duas perguntas que elaboramos
7	02/03/2012	1 hora-aula	Aplicação da tarefa 6
8	05/03/2012	1 hora-aula	Continuação da aplicação da tarefa 6 Discussões Aplicação da tarefa 7
10	06/03/2012	1 hora-aula	Aplicação das tarefas 8 e 9
11	08/03/2012	1 hora-aula	Aplicação das tarefas 10 e 11

Fonte: A autora

Foram quatro semanas de aplicações, totalizando onze episódios e onze problemas aplicados. Cada episódio teve duração de 1 hora-aula (45 minutos). A testemunha registrava suas observações em notas de campo ao passo que gravações eram feitas.

Para dar início a esse trabalho duas tarefas foram escolhidas inicialmente. Depois de cada tarefa aplicada e resolvida pelos estudantes promovíamos discussões com a turma de forma que os estudantes pudessem ter oportunidades de expor seu conhecimento matemático e suas maneiras próprias de lidar com aqueles problemas.

Nos momentos de discussão exploramos algumas notações como tabelas, reta numérica, ou esquemas, e também estimulávamos os estudantes a construírem seus desenhos ou suas próprias formas de representar aquela situação.

Os problemas aplicados foram retirados de trabalhos de educação algébrica para séries iniciais de David Carraher e Ana Lucia Shielmann (2001), Bárbara Brizuela (2007), João Pedro da Ponte (2009), Dario Fiorentini, Fernando Luis Pereira Fernandes e Eliane Matesco Cristóvão (2004). Apenas três foram traduzidas por nós. Em

algumas delas fizemos adaptações com frases adicionais do tipo “Mostre com desenhos” para que os estudantes apresentassem outras formas de se expressar.

Para os estudantes os problemas tinham características tinham características diferentes das que estavam acostumados, pois em geral envolviam quantidades desconhecidas. Mesmo havendo um estranhamento inicial, demonstraram prazer e interesse em resolver aqueles problemas.

As análises dos dados serão feitas à luz da Análise de Conteúdo de Bardin (2004). De acordo com Bardin (2004) a análise de conteúdo aparece com duas funções: a propensão à descoberta e a confirmação de hipóteses. Na prática as duas funções podem coexistir de maneira complementar. O método envolve processos de fragmentação, identificação de unidades de significados e um processo de categorização, na busca de elementos que não estão evidentes em uma leitura superficial.

## Referências Bibliográficas

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3ª ed. Lisboa: Edições 70, 1977.

BOGDAN, R. C; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação**. 1ª ed. Porto: Porto Editora, 1994.

BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.

CARRAHER D. W.; SCHLIEMANN A. D. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, USA: NCTM e IAP, 2007. p. 669-705.

FIorentINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEM-LB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>>. Acesso em 03 out. 2005.

KIERAN, C. Concept associated with the equality symbol. **Educational studies in Mathematics**, v. 12, p. 317-326, 1981.

KIERAN, C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004.

LEW, H. C. Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. **The Mathematics Educator**, v. 8, n. 1, p. 88-106, 2004.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o Século XXI**. 6<sup>a</sup> ed. São Paulo: Papiros, 1997.

MALONE, J. A. et. al. Medindo a habilidade para resolução de problemas. In: KRULIK S.; REYS, R. E. **A Resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 283-298.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: LESH, R; KELLY, A. E. (Eds). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000, p.267-307.