Ideias e Compreensões Essenciais ao Ensino-Aprendizagem de Funções e a Resolução de Problemas

Ledevande Martins da Silva[1]

Silvanio de Andrade[2]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo:

O presente artigo se refere ao nosso trabalho de investigação que pretende evidenciar compreensões de ideias e compreensões essenciais de funções por alunos e analisar as contribuições da metodologia de ensino resolução de problemas aliada ao uso de representações múltiplas. Inicialmente, nossa pesquisa busca situar o problema de pesquisa dentro da Álgebra Escolar ao ensino-aprendizagem do conceito de função. Em seguida, na fundamentação teórica, trazemos: o papel das representações e as representações múltiplas na Álgebra Escolar pelos autores Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001), respectivamente. Para o desenvolvendo de compreensões essenciais de funções, destacamos Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). E, para o trabalho de ação/interação em sala de aula optamos pela metodologia de ensino resolução de problemas, na criação de um ambiente de aprendizagem compartilhado onde a interação, mediação e zona de desenvolvimento proximal sejam elos para a formação de conceitos numa perspectiva vygotyskiana dos termos. A metodologia de pesquisa é qualitativa na modalidade pesquisa pedagógica, segundo Lankshear e Knobel (2008), no qual o professor pesquisa sua própria prática em sala de aula. Os instrumentos de coleta de dados são: aulas ministradas, notas de aulas, análises das descrições das aulas e produção de alunos.

Palavras-chave: Álgebra. Funções. Representações. Resolução de problemas. Pesquisa pedagógica

Introdução

Ao longo da nossa experiência como professor de Matemática na Educação Básica percebemos que os alunos apresentam muitas dificuldades de aprendizagem em Álgebra. Outrossim, colocamos a temática da função dentro do campo da Álgebra Escolar que possui suas peculiaridades e dificuldades inerentes à compreensão e aquisição do pensamento funcional.

Dentre essas dificuldades, destacamos especificamente as dificuldades de aprendizagem no ensino do conceito de função conforme Markovits, Eylon e Buckeimer (1995) apontam em seus estudos que o conceito de função é de uma grande

[1] Mestrando em Ensino de Ciências e Matemática – UEPB. Professor de Matemática da Rede Pública Estadual de Pernambuco e dos cursos técnicos do Liceu da UNICAP.
ledevande.martins@gmail.com

[2] Orientador – Doutor em Educação (Ensino de Ciências e Educação Matemática) pela USP, com estágio no exterior, University of Georgia, EUA e Docente do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – UEPB.
silvanio@usp.br

complexidade, pois a definição de função da forma como é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos – domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência e diferentes formas de representação.

Cooney et al. (2002 apud Cooney, Beckmann e Lloyd, 2010) enfatizam os vários modos em que a função pode ser representada e destacam também as dificuldades de alunos em desenvolver flexibilidade na mobilização entre representações algébricas e outros tipos de representações.

Na literatura acadêmica mais recente, tem sido também apontada cinco grandes ideias ou ideias fundamentais a serem exploradas nesse tópico de conteúdo no Ensino Médio que de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) são: o conceito de função; a covariação e taxa de função; as famílias de funções; a combinação e transformação de funções; e as representações múltiplas de funções que fornecem as compreensões essenciais para o desenvolvimento desse tópico da Matemática. Entretanto, não encontramos pesquisas que tenham focado, especificamente, no desenvolvimento de ideias e compreensões essenciais de funções por alunos no cenário das pesquisas brasileiras.

Em nossa pesquisa bibliográfica, evidenciamos que no cenário internacional as representações múltiplas em *Álgebra* e *Funções* vêm sendo investigadas no campo da Educação Matemática no final da década de 80 e início de 90, sobretudo a partir do uso de novas tecnologias – calculadoras gráficas e softwares computacionais – ou ainda na resolução de problemas.

Outro ponto que passamos a nos preocupar é com a metodologia de trabalho em sala de aula porque além das dificuldades intrínsecas à complexidade conceitual ainda temos o problema de concepção de ensino que dificulta bastante uma compreensão efetiva e significativa de função matemática.

Qual a nossa proposta de abordagem para a temática da função a partir dessas observações preliminares? Em resumo, a pergunta norteadora desse trabalho será a seguinte: Que compreensões os alunos apontam das ideias e compreensões essenciais de funções? Quais as contribuições da metodologia de ensino da resolução de problemas aliada ao uso de representações múltiplas?

Mais importante do que dar uma resposta a essa pergunta, faz-se necessário, através deste trabalho de investigação, trazer uma reflexão de uma prática docente que venha a contribuir para uma melhor compreensão dos fenômenos de ensino-aprendizagem que se constituem tão complexos, feitos os acontecimentos de uma sala de aula onde o elemento surpresa vai estar sempre presente e vai guiar nossas reflexões a partir das nossas vivências e práticas docentes diárias de professor de Matemática.

Fundamentação Teórica

O papel das representações e as representações múltiplas no ensino-aprendizagem de álgebra

Existe uma grande variedade de enfoques e concepções a respeito da teoria da representação que pode ser explicada pelo grande número de áreas do conhecimento humano interessada nesse tema e pesquisas em Educação Matemática que utilizam essa teoria para se fundamentar. Em anos recentes, as pesquisas que envolvem as ideias sobre representação no ensino e na aprendizagem da Matemática assumem um papel considerável (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

De um modo geral, as representações são divididas em internas e externas. Em grosso modo, podemos defini-las assim: as representações externas são representações que podemos facilmente comunicar às outras pessoas; elas são as marcas sobre o papel, os desenhos, os gráficos e as equações. Enquanto, as representações internas são as imagens que criamos em nossa mente para objetos e processos matemáticos. Há muita dificuldade de serem descritas, por essa natureza e capacidade de descrever a cognição dos indivíduos, por isso podem ser denominadas de representações mentais (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

Para a nossa pesquisa, as representações ganham um papel importante na formação de conceitos a partir do momento que entendemos o conceito como um conjunto de ideias e compreensões essenciais que estão interrelacionados e dentre elas estão as suas representações e seus sistemas de representações.

Os autores Friedlander e Tabach (2001) apresentam quatro modos de representação essenciais à compreensão do ensino e aprendizagem da Álgebra Escolar: representação verbal, numérica, gráfica e algébrica. Devemos estar cientes das vantagens e desvantagens de cada representação:

1) *Representação verbal* é geralmente usada para apresentar um problema e na interpretação final dos seus resultados na resolução de um problema. Mas, o uso da linguagem verbal pode gerar dificuldades inerentes à língua materna tais como ambiguidades e associações irrelevantes ou incorretas.

2) *Representação numérica* frequentemente precede qualquer outra representação. O uso dos números é importante na aquisição de uma primeira compreensão de um problema e na investigação de casos particulares. Entretanto, sua falta de generalidade pode ser uma desvantagem.

3) *Representação gráfica* é eficaz em proporcionar uma imagem clara de uma função de variável real. Mas, as representações gráficas podem não ter a precisão necessária dependo da escala, por exemplo, adotada.

4) *Representação algébrica* é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos. Contudo, um uso exclusivo de símbolos algébricos, pode causar obstáculos à aprendizagem significativa em Matemática.

Cada uma dessas representações possuem vantagens e desvantagens na sua utilização. Por isso, Kaput (1992 apud Friedlander e Tabach, 20011) sugere a criação de um ambiente de representações múltiplas – ou seja – o uso combinado delas permitirá a representação de um problema e sua resolução em vários modos, dirimindo as lacunas de uma representação sobre outra.

Desenvolvendo uma compreensão essencial de funções para o ensino médio

As funções compõem uma área principal da Matemática crucial para o aluno aprender, mas desafiante para o professor ensinar. Os alunos do Ensino Médio precisam compreender funções e eles conseguem quando constroem pensamento quantitativo e relacional (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

Sabemos, a partir da literatura no campo da Álgebra Escolar, que o conceito de função está presente desde cedo na Matemática Escolar desde a simples contagem à observação de padrões em busca de regularidades e generalizações por meio das investigações e experiências significativas vivenciadas pelos alunos na sala de aula de Matemática. De modo que a publicação *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar* (2000) do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics – Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos) e Van de Walle (2006) recomendam um trabalho no tópico função para os alunos nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental a partir de situações contextualizadas onde eles possam evoluir mais no desenvolvimento e compreensão do conceito de função.

Muitos pesquisadores da Educação Matemática pontuam que, originalmente, a noção de função surge para permitir o estudo de relações entre quantidades, variando no mundo físico associado à ideia de movimento. As funções modelam os fenômenos que ocorrem na natureza e no cotidiano. Em outras palavras, as funções fornecem um quadro conceitual para responder as questões de ordem científica e do dia a dia. Esse conceito de função se refere a uma quantidade variável que depende de uma outra variável, ou seja, como uma relação de dependência entre grandezas (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

O conceito de função é, intencionalmente, amplo e flexível, permitindo-se aplicá-lo a uma vasta gama de situações. A noção de função engloba muitos tipos de entidades matemáticas além das *funções de variáveis reais* que descrevem quantidades que variam continuamente, por exemplo, matrizes, sequências e transformações geométricas podem ser vistas como funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). O conceito de função de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) é a grande ideia 1 que deve abranger todos os exemplos de funções e é subdividida em três compreensões essenciais: 1a, 1b e 1c que podem ser incorporadas a essa ideia.

> Compreensão essencial 1a: As funções são associações de valor único de um conjunto – do domínio da função – para outro – sua imagem.
>
> Compreensão essencial 1b: As funções são aplicadas para uma vasta gama de situações, elas são aplicadas para outros casos que não àqueles da *variação contínua*. Por exemplo: sequências são funções.
>
> Compreensão essencial 1c: O domínio e a imagem de funções podem não ser números. Por exemplo: matrizes e transformações geométricas

> são funções definidas sobre o plano no plano (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p. 8)

Assim, num curso de Ensino Médio, não podemos ter a pretensão de alcançar a amplitude e a flexibilidade que o conceito de função carrega dentro dele na sua completude porque sabemos do alto grau de dificuldade que isso representa para os alunos nesse nível de ensino. O conceito de função ultrapassa o terreno estritamente algébrico e deve ser trabalhado ao longo da escolaridade desde as séries iniciais até a Universidade.

As funções fornecem um meio para descrever como se relacionam as quantidades que variam juntas (covariação). Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações pelo entendimento da taxa de variação em que um quantidade varia em relação à outra (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010). À grande ideia 2, covariação e taxa de variação, é incorporada três compreensões essenciais de funções (2a, 2b e 2c):

> *Compreensão essencial 2a*: Para funções reais, certos padrões de covariação ou padrões em como duas variações mudam juntas, indicam um membro em uma família particular de funções e determina o tipo de fórmula que a função tem.
>
> *Compreensão essencial 2b*: Uma taxa de variação descreve como uma quantidade variável muda em relação à outra – uma taxa de variação descreve a covariação entre duas variáveis.
>
> *Compreensão essencial 2c*: A taxa de variação de uma função é uma das principais características que determina que tipo de fenômeno do mundo real a função pode modelar (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p.8)

As funções podem ser classificadas dentro de diferentes famílias de funções, cada uma com sua única característica própria. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) incorporaram a esta grande ideia 3 mais 7 compreensões essenciais de função designidas, a seguir:

> *Compreensão essencial 3a*: Membros de uma família de funções compartilham o mesmo tipo de taxa de variação (...)
>
> *Compreensão essencial 3b*: A função Afim é caracterizada por uma taxa de variação constante (...)
>
> *Compreensão essencial 3c*: A função quadrática é caracterizada por uma taxa de variação linear (...)
>
> *Compreensão essencial 3d*: A função exponencial é caracterizada por uma taxa de variação que é proporcional ao valor da função (...)
>
> *Compreensão essencial 3e*: As funções trigonométricas são exemplos naturais e fundamentais de padrões periódicos (...)

> *Compreensão essencial 3f*: A progressão aritmética pode ser pensada como função afim cujo domínio são números inteiros positivos.
>
> *Compreensão essencial 3g*: A progressão geométrica pode ser pensada como função exponencial cujo domínio são números inteiros positivos (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p. 9)

A maioria das funções matemáticas estudadas é uma combinação aritmética. As funções, às vezes, têm inversas. As funções podem ser analisadas corriqueiramente do ponto de vista de como elas são feitas de outras funções. Portanto, as funções podem ser combinadas, decompostas em partes e transformadas em muitas diferentes maneiras, permitindo-nos analisar funções para ver relações entre gráficos de funções. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) denominaram esta grande ideia 4 de combinação e transformações de funções e incorporaram a ela mais 4 compreensões essenciais:

> *Compreensão essencial 4a*: Operações com funções
>
> *Compreensão essencial 4b*: Sob condições apropriadas as funções podem ser compostas.
>
> *Compreensão essencial 4c*: Para as funções reais, compondo uma função na forma de mudanças de funções a fórmula e o gráfico são facilmente previsíveis.
>
> *Compreensão essencial 4d*: Sob condições apropriadas, as funções têm inversas (...) (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p. 10).

As funções podem ser representadas em múltiplas maneiras, incluindo representações algébricas, gráficas, verbal e tabular. Para Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) existem quatro compreensões essenciais que são incorporadas à grande ideia cinco - representações múltiplas de funções. Serão destacadas a seguir àquelas que são consideradas mais significativas para os alunos aprenderem:

> *Compreensão essencial 5a*: As funções podem ser representadas de várias maneiras (...)
>
> *Compreensão essencial 5b*: Mudando o modo que a função é representada não faz mudança de função, embora representações diferentes destacam características, e de alguma maneira apresenta somente uma parte da função.
>
> *Compreensão essencial 5c*: Algumas representações de uma função devem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto.
>
> *Compreensão essencial 5d*: Conexões entre representações são importantes no estudo de funções (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010, p. 10).

Essas ideias e compreensões estão todas conectadas e interconectadas. Transitar entre e em meio a cada uma delas pode ajudar a desenvolver ideias e compreensões essenciais de funções. Os alunos precisam desenvolver a habilidade de mover-se facilmente entre muitas interpretações de funções, suas características e os modos em que elas podem ser usadas para representar fenômenos do mundo real.

Resolução de problemas

Nesta pesquisa para o trabalho de ação/interação em sala de aula, necessitamos de uma definição no que diz respeito à metodologia de ensino adotada. Abaixo, tentaremos explicar e direcionar o caminho escolhido, a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas aliado ao uso das representações múltiplas.

Podemos afirmar que resolver problemas é uma atividade intrínseca à Matemática, ou seja, ao fazer matemático. Mas, afinal, o que é um problema? Segundo LESTER (1980, p.287):

> Um problema é uma situação em que um indivíduo ou um grupo é solicitado a desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema.

Somente com o trabalho de George Polya *How to Solve It*, traduzido para o português como *A Arte de Resolver Problemas*, publicado em 1945 é que se pode falar em metodologia de resolução de problemas imaginada para uma sala de aula.

Schroeder e Lester (1989) apresentaram três concepções de ensino da resolução de problemas: 1) ensinar para a resolução de problemas: ficando para o final da apresentação do conteúdo. 2) ensinar sobre a resolução de problemas enfatizando as heurísticas e as quatro fases do Polya: compreender o problema; elaborar um plano de ação; executar o plano e fazer retrospecto. 3) ensinar via/através da resolução de problemas: tomando como ponto de partida o problema para fazer a construção do saber e do saber fazer matemático.

Somente na década de 80 a resolução de problema entra como tema central da Matemática Escolar no currículo norte-americano com a publicação do documento *Uma agenda para ação* do NCTM, alavancando grandes pesquisas no ensino de Matemática sobre a resolução de problemas.

Onuchic (1999) e Onuchic e Alevatto (2004) apresentaram um roteiro da proposta metodológica do ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, de maneira resumida. Os passos são: formação de grupos, registro dos diferentes resultados, defesa pelos grupos (plenária), análise dos resultados, consenso dos resultados e formalização do conteúdo.

Já Andrade (1998) trabalhou a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas na sua dissertação de mestrado onde apresentou a resolução e exploração de problemas a partir da relação

Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS) envolvendo dois aspectos: o processo e o produto como componentes essenciais de resolução de problemas. Para esse autor essas relações não são lineares e também não seguem uma sequência de passos. Pois, o enunciado do problema traz sempre algo novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula, e o planejamento do trabalho é flexível, podendo ganhar vários formatos e explorações, inclusive podendo ser ampliado para discussões de temáticas sócio-político-culturais.

A abordagem da proposição de problemas na Matemática parece ter sido primeiramente introduzido pelos autores Brown e Walter (1970/1983). Entretanto, o estudo sobre a pesquisa em proposição de problemas são mais recentes, Brown e Walter (2005) e English (2003). Esta atividade é central entre os matemáticos, que envolve não apenas respostas corretas e sim perguntas bem formuladas. Fazer com que o aluno possa elaborar seus próprios enunciados, vai exigir dele um controle maior sobre os elementos e objetos matemáticos do seu domínio. Vejamos como a autora brasileira CHICA (2001, p.151) se refere ao trabalho com a proposição de problemas:

> Quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que pretende. (...). O aluno deixa, então, de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.

A resolução de problemas como proposta de trabalho em sala de aula permanece com o mesmo nome. Entretanto, atualmente a ela incorporamos novos elementos e ferramentas que venham a favorecer novas questões, novas perspectivas, ampliando cada vez mais o campo. No século XXI percebemos uma forte tendência das pesquisas em resolução de problemas na sala de aula conforme English e Sriraman (2010), na perspectiva da modelação matemática sob uma visão interdisciplinar.

Nossa metodologia de ensino se propõe a trabalhar a resolução, a proposição e a exploração de problemas aliada ao uso de representações múltiplas, em que o diálogo, a interação social, a colaboração e o compartilhamento de ideias entre aluno-aluno, professor-aluno, professor-alunos, são extremamente importantes para que possamos viabilizar nossa proposta didático-pedagógica. Diante desse sistema complexo apresentado, a perspectiva interacionista de Vygotsky, junto com outros constructos de sua teoria, tais como mediação, zona de desenvolvimento proximal e a formação de conceitos vão nos ajudar a esclarecer e entender o caminho metodológico por nós adotado.

O elo entre trabalhar com a resolução, proposição e exploração de problemas e representações múltiplas é a mediação, como também são elementos mediadores o professor, os alunos, a calculadora, o computador, entre outros. O próprio processo e todas as suas fases e produtos desse trabalho são, também, mediados. Nesse processo o ensino-aprendizagem de Matemática não mais se dá pela via direta *(⍰→⍰)*, por meio de um processo simples de estímulo-resposta e passam a ser uma relação mediada que requer um elo X de segunda ordem que Vygotsky chamou de signos e instrumentos que é colocado no interior dessa estrutura operacional entre o estímulo e a resposta, criando um novo modelo triangular.

No âmbito de sua Teoria, Vygotsky elaborou o conceito de zona de desenvolvimento proximal (SDP). Vejamos como ele define ZDP:

> A zona de desenvolvimento proximal é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da resolução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes (VYGOSTSKY, 2007, p. 97).

Por essa razão é que as atividades de sala de aula deverão ser planejadas e realizadas sempre levando em consideração a ZDP dos nossos alunos; que levará a uma modificação dos níveis. No entanto, se a atividade escolar estiver abaixo da ZDP, o aluno vai perder o interesse. Pois, a situação deve ser um problema novo para ele. E se ela estiver acima de seu nível de desenvolvimento, ele acabará se desmotivando completamente da tarefa a ser realizada.

Assim a aprendizagem do aluno se dá mediante modificações nos níveis de desenvolvimento, por exemplo, problematizando e compreendendo essas transições e conexões no contexto da resolução, proposição e exploração de problemas ele estará saindo de um nível para outro fazendo essa variação na ZDP como mais um recurso que deve ser trabalhado na sala de aula de maneira pedagogicamente adequada envolvendo dentre outros aspectos, a formação de conceitos.

Vygotsky e seus colaboradores, na sua pesquisa de formação de conceitos, distingue dois tipos de conceitos: os *conceitos espontâneos* ou *cotidianos* que são formados pelos indivíduos no contato com o ambiente social e os *conceitos científicos* que são aprendidos pelos indivíduos na escola e só existem no contexto de uma educação formal.

Os conceitos cotidianos são trazidos pelos alunos para a escola por meio das suas experiências pessoais e coletivas e por eles adquiridos na sua realidade social e cultural. Por essa razão é que os problemas do cotidiano servem de elemento de mediação na formação de conceitos científicos.

No estudo das funções matemáticas – conceitos científicos – os conceitos esclarecedores são: *conceito de função*, *taxa de variação*, *famílias de funções*, dentre outros que são ideias essenciais do tópico de estudo das funções que constituem um conjunto de ideias e compreensões interrelacionados de modo que só poderá existir um desenvolvimento e compreensão efetiva das funções matemáticas num contexto escolar ou de educação formal.

Metodologia

A metodologia adotada nesta pesquisa é qualitativa caracterizada de acordo com Lüdke e André (1987) e Bogdan e Biklen (1994), onde o ambiente natural, a sala de aula, fornecerá os dados a serem coletados e o professor, como seu principal instrumento, a pesquisa deve apresentar características descritivas e analíticas. A modalidade da pesquisa é de pesquisa pedagógica segundo Lankshear e Knobel (2008), na qual o professor pesquisa sua própria prática de sala de aula exercendo o papel duplo de professor- pesquisador.

A pesquisa foi realizada na prática escolar do Ensino Médio brasileiro, em uma Escola Pública Estadual de Pernambuco na cidade de Recife. Importa, aqui, fazer referência ao sujeito coletivo desta pesquisa, uma turma de 1º ano do Ensino Médio regular do turno vespertino. A escolha do ano escolar surgiu pelo fato de tradicionalmente, o contexto das funções ser abordado com mais ênfase no primeiro ano, favorecendo a nossa oportunidade de passar mais tempo investigando o desenvolvimento e compreensões essenciais deste tópico de ensino.

Esta ação/interação, foi iniciada em 19/04/2012 com previsão para término em setembro de 2012, no qual criou-se as condições para a coleta de dados por meio das aulas ministradas, notas de aulas, análises das descrições das aulas e produções de alunos. Não recorremos à gravação nem filmagem porque no universo de uma turma de 44 alunos as ações poderiam perder naturalidade para o trabalho em grupos de 2 a 5 alunos e pelo fato de considerarmos ser possível realizar algumas anotações em sala de aula a partir de observações relevantes a nossa investigação e descrevermos as aulas sempre ao final de cada encontro.

O trabalho de ação/interação em sala de aula foi constituído de quatro unidades didáticas: I) Conceito de Função; II) Função Afim; III) Função Quadrática e IV) Função Exponencial. De modo que possamos produzir uma reflexão acerca do processo de ensino-aprendizagem baseada na compreensão e aquisição do pensamento funcional: linear, quadrático e exponencial.

Considerações Finais

Acreditamos que foi possível avançarmos na compreensão de ideias e compreensões essenciais de funções. Basicamente enfatizamos o conceito de função sob diferentes concepções. Inicialmente como relação entre grandezas de quantidades discretas e contínuas. Exploramos a ideia intuitiva de função como entrada e saída e finalmente por meio da formalização do conhecimento mediada pelo professor-pesquisador. Chegamos à definição verbal de função e de seus elementos, tais como o domínio e a imagem e representações múltiplas de funções por meio de tabelas, gráficos e equações.

Podemos afirmar, mediante as produções dos alunos e a participação ativa deles, que a metodologia de ensino da resolução de problemas aliada às representações múltiplas, tem contribuído para a compreensão essencial de funções. No entanto, sentimos a necessidade de avançarmos no sentido de trazer elementos dos aspectos sociais e culturais desenvolvidos em sala de aula trabalhando a resolução de problemas ampliados às questões ambientais, de saúde e cidadania, por exemplo. Assim, a nossa proposta pretende atender não somente ao uso de representações múltiplas como ferramenta rica e exploratória que está dentro da própria Matemática, mas também trazer visões mais amplas que possam ajudar na vida profissional e social dos nossos alunos.

Precisamos avançar na proposta pedagógica da metodologia de ensino para trazer proposição de problemas de modo que os alunos possam elaborar e propor suas próprias questões e passem a ter maior controle sobre elas; na exploração de problemas que não se encerrem numa apresentação de resoluções para um dado problema, mas que o aluno possa fazer novos questionamentos e trazer mais riqueza a esse mesmo problema. Na nossa pesquisa, observamos uma predominância maior da resolução de problemas sobre a proposição e a exploração de problemas.

A perspectiva da resolução de problemas vem respondendo a nossa pergunta de pesquisa no sentido de trazer contribuições para o desenvolvimento de compreensão essencial de funções habilitando os alunos dessa turma de Ensino Médio a enfrentar desafios da Matemática Escolar. Porém, além de realizarmos confluências de ideias e compreensões essenciais de funções, essa visão deve ser ampliada no sentido de podermos levar aos nossos alunos conexões múltiplas mais abrangentes.

Referências

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática)

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, 1994. (Coleção Ciências da Educação – vol. 12)

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995. p.p 23-27.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p.p. 151-173.

COONEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. **Developing essencial understanding of functions:** for teaching mathematics in grades 9-12. Reston, NCTM, 2010.

ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. Problem solving for the 21st century. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Ed.). **Theories of mathematics education:** seeking new frontiers. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010.p.p 263-290.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Eds.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston, NCTM, 2001. (Yearbook 2001). p.p 1-23.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1987.

LESTER, F. K. Research in mathematics problem solving. In: Shumway, R. J. (Ed.). **Research in mathematics education.** Reston, NCTM, 1980. p.p. 286-323.

MARCOVITS, Z.; EYLON, B. S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As ideias da álgebra.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1995. p.p 49-69.

MORAES, M. S. S. et al. **Educação matemática e temas políticos-sociais.** Campinas/SP: Autores Associados, 2008. (Coleção formação de professores).

MOSES, B.; BJORK, E.; GOLDENBERG, E. P. Beyond problem solving: problem posing. In: **Teaching and learning mathematics in the 1990s.**

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar.** Tradução: Magda Melo. 2 ed. Lisboa: APM, 2008.

ONUCHIC, L. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectiva. 5ª imp. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.p. 199-218.

______., ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre os ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p.p. 213-231.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. **Vygotsky**: uma síntese. 6ª ed. São Paulo: Edições Loyola, 2009.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L. H. **Teaching student** – centered mathematics grades 5-8, v. 3. Boston: Pearson, 2006.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. Organizadores Michel Cole et al.; Tradução: José Cippolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

______. **Pensamento e linguagem.** Tradução: Jefferson Luiz Camargo; Revisão técnica José Cippolla Neto. 4ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.