

Função Polinomial do 2º Grau: uma proposta de abordagem para a conversão entre o registro algébrico e o gráfico

Mestrando Edmar Fernandes Madeira¹

Profª Drª Vera Helen Giusti de Souza²

GD3 – Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo

Tem-se por finalidade, com esta pesquisa, verificar se a utilização da língua materna, para descrever e comparar a movimentação de gráficos de funções polinomiais do 2º grau, pode ajudar no desenvolvimento da conversão entre os registros gráfico e algébrico. A luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995, 2011) colocam-se três questões de pesquisa: “Como alunos do Ensino Médio descrevem, na língua materna, as modificações no gráfico da função $f(x) = x^2$, quando o comparam com os das funções $g(x) = kx^2$; $h(x) = (x+k)^2$; $m(x) = x^2 + k$, para algum k constante?”; “Com essa descrição, conseguem associar o parâmetro k à movimentação do gráfico?”; “Essa associação dispara o processo de aprendizagem da conversão entre os registros gráfico e algébrico, no caso da função polinomial do 2º grau?”. Para atingir o objetivo proposto, elaborou-se um conjunto de atividades, que deverão ser aplicadas em um grupo de alunos de Ensino Médio, que trabalharão em duplas e serão acompanhados por um observador neutro. Com a análise dos protocolos e das observações, à luz da fundamentação teórica escolhida, espera-se responder as questões de pesquisa.

Palavras-chave: Função polinomial. Gráfico. Registro algébrico. Tratamento. Conversão.

INTRODUÇÃO

A preocupação com o tema proposto surgiu de minha experiência de pelo menos vinte anos como professor de Matemática, em salas de aula do Ensino Fundamental e Médio, onde pude perceber, entre os alunos, dificuldades para compreender, escrever ou analisar funções, nas mais variadas formas de representação. Esta percepção também tem ocorrido em salas de aula do Ensino Superior, nas quais leciono Matemática, Estatística, Bioestatística ou Física.

Para buscar resposta às inquietações sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, em particular no caso da função polinomial do 2º grau, tema freqüente e, diria, obrigatório, nas escolas de Educação Básica e no Ensino Superior, ingressei no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNIBAN-SP para desenvolver uma Dissertação de Mestrado com o objetivo de investigar se alunos,

¹Mestrando em Educação Matemática pela Universidade Bandeirante de São Paulo. edmat@ig.com.br,

²Orientadora, Professora Doutora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo. verahgsouza@gmail.com

incentivados a utilizar a língua materna para descrever e comparar gráficos de funções polinomiais do 2º grau, desenvolvem a conversão entre os registros gráfico e algébrico.

Com este objetivo, coloquei como questões de pesquisa: *“Como alunos do Ensino Médio descrevem, na língua materna, as modificações no gráfico da função $f(x) = x^2$, quando o comparam com os das funções $g(x) = kx^2$; $h(x) = (x+k)^2$; $m(x) = x^2 + k$, para algum k constante?”. “Com essa descrição, conseguem associar o parâmetro k à movimentação do gráfico?”. “Essa associação dispara o processo de aprendizagem da conversão entre os registros gráfico e algébrico, no caso da função polinomial do 2º grau?”*

Optei por utilizar, como fundamentação teórica, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), para elaborar e analisar um conjunto de atividades, que pretendo aplicar em um grupo de alunos do Ensino Médio, pois acredito que o uso da língua materna pode ajudar a aprendizagem em Matemática, em particular com o objeto função, no caso da relação entre o gráfico de uma função polinomial do segundo grau e as expressões algébricas correspondentes e, com essa teoria, Duval (2003, 2004, 2009) ressalta a importância de se utilizar, no trabalho com a Matemática – e/ou na comunicação em Matemática - ao menos dois sistemas de representação diferentes para representar um mesmo objeto matemático, para que não se confunda o objeto com a representação que se fez desse objeto.

JUSTIFICATIVA

Em nossa prática profissional, atuando como professor de Matemática no Ensino Fundamental e Médio percebemos que, no aprendizado de funções, muitos alunos apresentam uma lacuna cognitiva na interpretação conceitual das diferentes formas de representação desse objeto matemático. A este respeito, Duval (2003) destaca a dificuldade que um sujeito pode ter para diferenciar um objeto matemático de uma representação que o torne acessível.

[...]”compreender” ou “saber” um objeto matemático consiste em ser capaz de reconhecer suas propriedades e representações características, relacioná-los com os restantes objetos matemáticos e usar esse objeto em toda a variedade de situações problemáticas prototípicas que lhes são em aula. Deste ponto de vista a compreensão alcançada por um sujeito em

um momento dado dificilmente será total ou nula, mas será parcial e progressiva (DUVAL, 1995, p. 16, tradução nossa)

Pesquisadores como Sfard (1991) apontam dificuldades encontradas em alunos na aprendizagem de Matemática, com causas de caráter epistemológico e ontológico, pois a Matemática é uma ciência que possui sua própria linguagem. Para manipularmos suas entidades abstratas, o fazemos por meio de diversas representações, como por exemplo, os símbolos.

[“...] para o matemático o que importa é conhecer as regras e as leis pelas quais elas devem ser combinadas” (COURANT; JOHN, apud SFARD, p. 4). Ser capaz de “ver” esses objetos invisíveis, de alguma forma parece ser um componente essencial da habilidade matemática; a falta desta capacidade pode ser uma das maiores razões pelas quais a matemática parece praticamente impermeável para tantas “mentes bem formadas”. (SFARD, p. 4)

Sierpiska (1992) analisa obstáculos epistemológicos encontrados na compreensão do conceito de função por parte de estudantes e apresenta 16, dentre eles que numera como OE(f)-15 “O gráfico de uma função é um modelo geométrico da relação funcional. Não precisa ser fiel, pode conter pontos (x, y) tais que a função não está definida em x ”. Para superar esse obstáculo, que indica que o sujeito não compreendeu a relação entre o objeto função e sua representação gráfica, Sierpiska (1992) recomenda duas abordagens didáticas possíveis, a E(f)-15 “Discriminar entre diferentes formas de representar uma função e a própria função” e a E(f)-16 “Síntese das diferentes maneiras de dar funções, representá-las e falar sobre elas”. Em nossa pesquisa, pretendemos propor e analisar uma abordagem para que os alunos superem o obstáculo OE(f)-15, via as sugestões E(f)-15 e E(f)-16, por meio da língua materna.

No Brasil, destacamos vários estudos apontando dificuldades dos alunos com a compreensão em Matemática, como Machado (1998), Mendes (1994), Schuwarz (1995), Rêgo (2000), Zuffi (2001), Oliveira (2004).

As que alunos apresentam, relacionadas ao entendimento de função - e que temos observado como professores de Matemática, na nossa prática cotidiana - são corroboradas pelos trabalhos de Maia (2007), Angelini (2010) e Bonomi (2010).

Do ponto de vista teórico, julgamos que o conceito de função é relevante para a construção do conhecimento matemático e por isso ressaltamos a importância dada, na formação do estudante, por Eves (2004, p. 661) quando afirma: “..., é *inquestionável* que

quanto antes se familiariza um estudante com o conceito de função, tanto melhor para a sua formação matemática". Algumas recomendações de Sierpinska (1992), relativas ao ensino de funções, alertam-nos a *"incentivar os alunos a verbalizarem os sujeitos de mudanças, tornando-os capazes de perceberem não somente como isso muda, mas também o que muda"*; e *"prover os alunos com um amplo espectro de funções e dar-lhes flexibilidade para usá-las em situações aplicadas e nos diversos modos de representação a partir das transformações"* (SIERPINSKA, 1992, tradução nossa). Percebe-se substancialmente nessa fala a importância da utilização de funções como ferramenta na aplicação e ou modelação de vários fenômenos, presentes em diversas áreas do conhecimento, como a Física, a Biologia e a Economia, pois poderá possibilitar uma melhor compreensão e interpretação das situações; portanto, é fundamental o estudo desse objeto matemático. Ainda, segundo Courant (2000), *"além dessas aplicações práticas, o conceito de função favoreceu o desenvolvimento da própria Matemática"*.

Paralelamente à idéia de função, os gráficos estão presentes na vida dos alunos desde muito cedo, pois são encontrados em jornais, revistas e televisão. Conforme Tinoco et al. (1998, p. 12),

[...] a familiarização do aluno com os diversos tipos de gráficos pode se dar ao mesmo tempo em que o aluno adquire as noções de variável e dependência, básicas para a construção do conceito de função. Essas noções ficam cada vez mais claras ao passo que o aluno constrói e interpreta gráficos.

Do ponto de vista pedagógico, o estudo de função e seus gráficos decorre da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar: portanto, torna-se importante a apreensão desses conteúdos pelos alunos, o que é corroborado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), que orientam abordar as idéias de função e gráfico desde as séries iniciais e a esse respeito menciona

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problemas de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 199, p. 255).

Ainda mais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 1999) colocam como competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática.

Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.); transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa; utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação; desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, MEC/SEMT, 2006, p. 46)

Observa-se também, nos PCN's, relevante ênfase à busca da utilização da Matemática no mundo real, com vistas à formação de uma cultura mais ampla e um entendimento dos problemas sociais contemporâneos pelos alunos, como é proposto em outros documentos oficiais como "A proposta Curricular do Estado de São Paulo" (2008) e "O caderno do aluno do Estado de São Paulo" (2008). Nestes documentos, observamos a importância dada ao tratamento da Matemática em sala de aula. No Caderno do aluno do 1º ano do Ensino Médio, Volume II, a abordagem de funções é feita de forma contextualizada, buscando orientar os estudantes para a aplicação e utilização da Matemática em fatos sociais, o que pode proporcionar aos mesmos uma maior percepção e apreensão na resolução de problemas cotidianos. Nesse contexto, de acordo com as idéias de Duval (2004) e com as quais concordamos no processo de ensino de funções, o professor é o responsável por trazer, para a sala de aula, pelo menos dois sistemas semióticos de representação, com os respectivos tratamentos e conversões. No caso específico de função, uma possibilidade pode ocorrer quando o registro gráfico é comparado com o algébrico e vice-versa; outra, quando um texto em língua materna é transformado em registro gráfico ou vice-versa; e outro ainda é quando o registro algébrico é transformado em um texto em língua materna ou vice-versa.

Por todas as razões expostas acima, julgamos pertinente investigar, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995, 2011), se um conjunto de atividades sobre função polinomial do 2º grau, utilizando o registro algébrico, o registro gráfico e a língua materna podem provocar a conversão desses registros de representação, em um grupo de alunos do Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

Neste capítulo apresentamos as principais ideias da fundamentação teórica que escolhemos para nossa pesquisa, tanto para desenvolver cada uma das atividades, como para analisá-las, em busca de respostas às nossas questões de pesquisa.

Com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Raymond Duval (2003, 2004, 2009) propõe que não é possível estudar nem comunicar Matemática sem recorrer às representações, sejam elas mentais e/ou semióticas. As representações semióticas são representações na forma gráfica, por meio de figuras geométricas, com a escrita algébrica ou com a língua materna, cada um deles formado com leis de organização que são próprias e que lhes permitem representar objetos matemáticos. As representações semióticas têm então dois aspectos: a forma, também denominada representante e o conteúdo, ou representado. No caso da função polinomial do 2º grau, podemos representá-la no formato algébrico, no gráfico ou ainda na língua materna. Segundo Duval (2003, 2004, 2009), um objeto matemático não deve ser confundido com uma de suas representações, pois é o conteúdo que é importante e não a forma sob o qual é representado e esta distinção é relevante na apreensão conceitual de um objeto matemático,

o papel das representações matemáticas semióticas, na atividade cognitiva da matemática, em particular da representação gráfica, dificilmente pode ser subestimado. A apreensão conceitual de um objeto matemático é inseparável da apreensão e produção de suas representações semióticas. Ser capaz de se mover por diferentes sistemas de representação é uma condição necessária para a discriminação entre o objeto matemático e suas representações e para reconhecer o objeto matemático em cada uma das suas possíveis representações. (DUVAL, 2004)

Duval (2003, 2004, 2009) ainda defende que, para um sujeito não confundir o conteúdo com o representante, precisa discriminar e utilizar pelo menos dois sistemas distintos de representação semiótica, com os respectivos tratamentos (leis de organização dentro de um mesmo sistema) e conversões (leis que permitem transformar um representante de um sistema num representante de outro). Assim, optamos por utilizar três sistemas de representação, o algébrico, o gráfico e o da língua materna. O algébrico porque é o mais utilizado e, de certa forma, o mais confiável; o gráfico, porque é mais geral e o que nos ocorre naturalmente como um segundo sistema de representação; o da língua

materna, porque é “universal”, isto é, é a forma de comunicação mais básica do ser humano e, nos parece, o caminho natural quando fazemos tratamentos ou conversões.

Como não podemos esquecer que as representações semióticas, que consideramos como representações concretas, servem de suporte para as representações mentais, ressaltamos a importância de utilizarmos a Teoria das Representações Semióticas em nosso trabalho.

Segundo Duval (1999), a utilização de registros de representação semiótica na construção do conhecimento matemático é fundamental, pois,

[...] diferentemente de outros campos do conhecimento (botânica, geologia, astronomia, física), não há outras maneiras de se obter acesso aos objetos matemáticos a não ser através da produção de registros de representação semiótica. Em outros campos de conhecimento, representações semióticas são imagens ou descrições de fenômenos do mundo real aos quais podemos ter acesso perceptual e instrumental sem a utilização dessas representações. Em Matemática esse não é o caso. (DUVAL, ???, p. 4).

Cotidianamente podemos utilizar um gráfico, uma tabela, diagramas, notações simbólicas, expressões algébricas, para representar objetos, conteúdos, conceitos matemáticos; porém, apesar da representação semiótica ser condição fundamental para se obter acesso ao pensamento matemático, não se deve confundir os objetos matemáticos com a representação utilizada. O objeto matemático é o representado, é abstrato, enquanto sua representação é o representante, ou seja, o que é utilizado para trabalhar com o objeto ou comunicá-lo.

No trabalho com funções polinomiais do 2º grau, a distinção entre estas e as representações utilizadas para descrevê-las é uma das condições que vemos como essenciais para a compreensão desse conceito.

Nesse contexto, existem dois tipos de transformações que se distinguem diametralmente: o tratamento e a conversão. Caracteriza-se como tratamento a transformação de uma representação semiótica em outra, sem sair de um mesmo tipo de registro, ou seja, o tratamento é uma transformação interna ao sistema de representação escolhido para o registro. Como exemplo, tem-se o caso de encontrar os zeros de uma função usando apenas manipulações algébricas. Obtém-se o resultado esperado pelo *tratamento* da expressão algébrica, de acordo com as regras de manipulação do sistema algébrico de representação.

$$f(x) = 2x^2 + 4x \Rightarrow f(x) = 2x(x + 2)$$

Se $f(x) = 0$ então $2x(x+2) = 0$ e $x' = 0$ ou $x'' = -2$

Figura 1 – Transformação por tratamento

A conversão, por sua vez, é a transformação de uma representação semiótica em outra, na qual ocorre mudança de registro, em sistemas de representação distintos, mas se conserva o objeto denotado. Um exemplo de conversão é a transformação de um registro algébrico de uma função em um registro gráfico.

Sistema Algébrico

$$f(x) = x^2 + 1$$

\Rightarrow

Sistema Gráfico

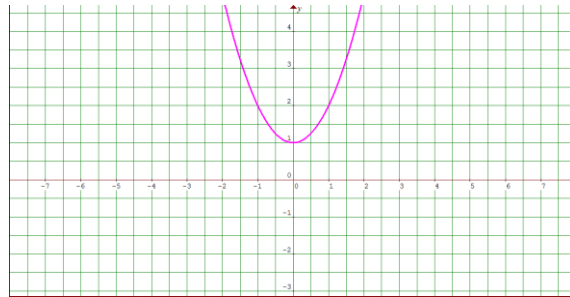


Figura 2 – Transformação por Conversão

Quando representamos um mesmo objeto em dois sistemas distintos de representação semiótica, destacamos, em geral, propriedades diferentes do objeto representado. Por exemplo, no caso da função polinomial do segundo grau, a expressão algébrica nem sempre deixa evidente as coordenadas do vértice, enquanto o gráfico, sim. Pela manipulação pura e simples da expressão algébrica, podemos não “enxergar” que o gráfico tem um formato parecido com o de uma parábola, enquanto o gráfico dá essa ideia.

Por essa razão, a conversão é, conforme Duval (2003), uma transformação mais complexa que o tratamento, pois a mudança de registros prevê o reconhecimento do mesmo objeto em duas representações cujas propriedades destacadas são distintas e um sujeito só aprende a fazer uma conversão se for “estimulado a aprender” as regras que permitem fazer tal passagem. Ainda mais, para este pesquisador, é o professor que deve trazer, para a sala de aula de Matemática, o trabalho com as conversões. Daí nosso interesse em investigar uma possível abordagem para a conversão entre os registros gráfico

e algébrico, com o uso da língua materna, em uma sala de aula de Matemática do Ensino Médio.

CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Neste capítulo, apresentamos nossas considerações em relação ao desenvolvimento de nossa pesquisa, que pode ser caracterizada como uma intervenção, com análise qualitativa dos dados, ligada à linha de pesquisa Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações, do programa de Mestrado em Educação Matemática da UNIBAN – SP.

Elaboramos um conjunto de atividades (ver anexo I), todas baseadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003, 2004, 2009), com o assunto função polinomial do 2º grau, focadaS principalmente na utilização da língua materna como uma forma de provocar a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico.

Pretendemos aplicar as atividades em uma escola pública da cidade de São Bernardo do Campo, do Estado de São Paulo e nosso público alvo será um grupo de 30 (trinta) alunos do Ensino Médio, que já tenham visto e estudado função e que já saibam trabalhar com gráficos. Os alunos poderão trabalhar individualmente ou em duplas e os trabalhos serão áudio-gravados e acompanhados por um observador neutro, para que possamos analisar diálogos e possíveis discussões surgidos na resolução das questões propostas. Podemos ainda, caso se faça necessário, utilizar entrevistas semi-estruturadas, após a realização das atividades, para dirimir dúvidas que possam existir nas respostas dadas nos protocolos.

Os protocolos, as áudios-gravações e as observações escritas formarão a base de dados para a nossa análise, bem como as possíveis entrevistas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

- Elaborar, aplicar e analisar didaticamente um conjunto de atividades com questões envolvendo a conversão da função polinomial do 2º grau na representação gráfica para a algébrica e vice-versa.

- Analisar os dados obtidos nos protocolos, nas áudios-gravações, nas observações e eventualmente nas entrevistas, à luz da Teoria dos Registros Semióticos de Representação (DUVAL, 2003, 2004, 2009).

A participação nas atividades será voluntária e os alunos participantes deverão trazer assinado (ou assinar se forem maiores de idade) o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Os protocolos não precisarão ser assinados e deverão ser identificados por um apelido ou um número, de livre escolha dos sujeitos, para que seja possível a realização de futuras entrevistas individuais, para possíveis esclarecimentos de dúvidas que tenham surgido com os textos dos protocolos. Estas entrevistas também serão gravadas e acompanhadas por um observador neutro.

Os protocolos, as áudio gravações e as observações escritas formarão a base de dados para a nossa análise, bem como as possíveis entrevistas. Esses dados só serão utilizados por este pesquisador e serão mantidos em sigilo absoluto, durante e após a realização da pesquisa.

Com a análise dos dados obtidos, à luz da fundamentação teórica escolhida, esperamos responder nossas questões de pesquisa.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, R. C. Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica. Dissertação de Mestrado. Recife - PE. 2007.

ANGELINI, N. M. Funções: Um estudo baseado nos Três Mundos da Matemática. UNIBAN. SÃO PAULO. 2010.

BRASIL. PCN+ Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC. Brasília. 2002.

BRASIL, S. D. E. M. E. T. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino Médio. Ciências da Natureza, matemática e suas Tecnologias. Brasília. 1999.

BRASIL, S. D. E. M. E. T. **PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília. 2002.

COURANT, R.; ROBINS, H. **O que é matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Peter Lang: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. 120 p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2002.

MAIA, D. **Função Quadrática: um estudo didático de uma abordagem computacional**. PUC-SP. São Paulo. 2007.

SÃO PAULO. **Curriculo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias**. Governo do Estado de São Paulo. São Paulo. 2010.

SIERPINSKA, Anna. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, Ed; HAREL, Guershon (eds). **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy**. Mathematical Association of America: 1992, MAA Notes, v. 25, p. 25-58.

