O Ensino dos Números Complexos numa Perspectiva Histórica: de Tartaglia ao Uso das TICs

Cláudia Rosana da Costa Caldeira[1]

GD 5:História da Matemática e Cultura

Resumo: Este artigo apresenta uma perspectiva histórica do ensino dos Números Complexos, considerando aspectos conceituais e as abordagens algébrica e geométrica. O estudo dos Números Complexos, no Ensino Médio, tem sido relevado a um segundo plano, pois os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) não mais apontam a sua obrigatoriedade. O texto apresenta um resgate do ensino dos Números Complexos no Brasil, traz algumas aplicações em outras ciências, e sugere o investimento prioritário na abordagem geométrica, visto que, atualmente, o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) é um excelente suporte para tal abordagem.

Palavras-chave: História dos Números Complexos. Educação Matemática. Metodologias de ensino da Matemática.

Introdução

Ao analisarmos os currículos escolares das instituições públicas e privadas de Ensino Médio percebemos que muitas eliminaram os Números Complexos dos currículos escolares justificando a falta de aplicação concreta desse tema. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) salientam que:

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. (BRASIL, 2002, p.122).

Nesse ponto discordamos dos PCN, pois acreditamos que o ensino dos Números Complexos não deva ser abandonado, ao contrário, deve ser amplamente discutido, para que novas formas de abordagem possam ser propostas, e tal tema possa servir para resolver problemas de geometria plana ou de eletricidade.

Para nos apropriarmos de um conteúdo é necessário, entre outros fatores, compreender como ele se estrutura, qual a sua história e quais suas inter-relações com as demais áreas do conhecimento. Acreditamos que o ensino de Matemática, dentre outros,

[1] Mestranda do PPG Ensino de Matemática -UFRGS– cccaldeira@terra.com.br

tem como objetivo desenvolver, nos alunos, habilidades e competências que os tornem capazes de resolver problemas usando como recursos seus conhecimentos.

Neste artigo, a discussão se concentra na importância do ensino dos Complexos através dos tempos e nas crenças de que não se pode estudar um conteúdo sem uma visão contextualizada. A proposta da dissertação é reconstruir a história dos Complexos, através de um conjunto de informações sistematizadas, que objetivam tornar mais clara a sua relevância tanto para quem ensina quanto para quem estuda.

Neste aspecto, quando se trata de Ensino Médio, uma visão histórica facilita o entendimento dos conceitos a serem desenvolvidos e possibilita que se estabeleçam as relações entre a área do domínio específico, no caso os Números Complexos, e suas relações transversais com os demais conteúdos a ele associados.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais salientam que:

> Nessa etapa da escolaridade (Ensino Médio), portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem [...].
> Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber. (BRASIL, 2002, p.112)

O artigo está dividido em 5 seções. A seção 2 apresenta a história dos Números Complexos. Na seção 3 são discutidos os aspectos do ensino de Complexos no Brasil. Já na seção 4 é apresentada reflexão sobre o uso de recursos tecnológicos no ensino de Números Complexos. As considerações finais são abordadas na seção 5. Ao final do texto, apresentam-se as referências bibliográficas utilizadas para elaboração deste artigo.

A origem dos Números Complexos

Com o objetivo de tornar o ensino dos Números Complexos mais atrativo para os alunos é bastante comum os professores dizerem que eles nasceram para dar uma solução para equações do segundo grau que possuem coeficientes reais. Mas tal fato não é verdade, como veremos no decorrer do trabalho.

Nicolo Fontana, que devido a um defeito na fala foi apelidado de Tartaglia (gago em italiano), escreveu, em 1531, em suas memórias ter descoberto uma regra para resolver equações de terceiro grau. Segundo Garbi (2006, p.121), o resultado foi publicado na *Ars Magna* (A Grande Arte), por Girolamo Cardano (1501-1576), quebrando a promessa e juramentos feitos a Tartaglia, de que não revelaria a fórmula.

A seguir, com a notação algébrica moderna, são apresentados os passos executados por Tartaglia e Cardano para a resolução da equação geral do terceiro grau dada por $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, e que se encontra no Caderno do professor, da proposta curricular do Estado de São Paulo (2008) para a 3ª série do Ensino Médio.

Primeiramente, dividem-se todos os coeficientes por a. Assim obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = o$$

Tomando $B = \frac{b}{a}$, $C = \frac{c}{a}$ e $D = \frac{d}{a}$, temos $x^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{B}{3}$, eliminamos o termo em x^2:

$$\left(y - \frac{B}{3}\right)^3 + B\left(y - \frac{B}{3}\right)^2 + C\left(y - \frac{B}{3}\right) + D = 0$$

$$y^3 - y^2B + \frac{B^2}{3}y \quad - \frac{B^3}{27} + By^2 - 2\frac{B^2}{3}y + \frac{B^3}{9} + Cy - \frac{CB}{3} + D = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{B^2}{3} + C\right)y + \frac{2B^3}{27} - \frac{2B^2}{3} - \frac{CB}{3} + D = 0$$

A equação fica da forma

$$y^3 + My + N = 0, \qquad (1)$$

Onde M e N são determinados em termos de B, C e D.

A equação (1) pode ser resolvida a partir da identidade

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 \qquad (2)$$

Esta pode ser reescrita do seguinte modo:

$$(p+q)^3 - 3pq(p+q) - (p^3 + q^3) = 0 \qquad (3)$$

Comparando (1) e (3) e tomando $y = p + q$ como solução da equação (1) temos

$$\begin{cases} -3pq = M \\ -(p^3 + q^3) = N \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{portanto} \quad \begin{cases} p^3q^3 = \frac{M^3}{27} \\ (p^3 + q^3) = -N \end{cases} \qquad (4)$$

O sistema (4) constitui um problema clássico de grau 2. Se p^3 e q^3 são conhecidos então a soma e o produto, $\frac{M^3}{27}$ e $-N$, respectivamente, também o serão. Logo, p^3 e q^3 são raízes da seguinte equação $z^2 + Nz + \left(\frac{M}{3}\right)^3 = 0$. Temos então:

$$z = \frac{-N \mp \sqrt{N^2 - 4\left(\frac{M}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{N}{2} \mp \sqrt{\frac{N^2 - 4\left(\frac{M}{3}\right)^3}{4}} = -\frac{N}{2} \mp \sqrt{\frac{N^2}{4} - \frac{4\left(\frac{M}{3}\right)^3}{4}}$$

Isto é, $z = -\frac{N}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}$

Assim, as raízes do sistema (4) serão

$$p^3 = -\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \text{ e } q^3 = -\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \quad \text{ou}$$

$$q^3 = -\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3} \text{ e } p^3 = -\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}$$

Em ambos os casos, como $y = p + q$, segue que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{N}{2} + \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{N}{2} - \sqrt{\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{3}\right)^3}}.$$

A equação acima, chamada de fórmula de Cardano-Tartaglia, resolve as equações de 3º grau do tipo (1). Em certos casos obtínhamos soluções "estranhas". Por exemplo, na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ aplicando a fórmula de Cardano obteremos

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}$$

Ou seja, $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

Em 1560, Rafael Bombelli, , em seu livro *L'Algebra Parte Maggiore dell'Arithmetica* propôs uma saída para essa questão. Ele acreditou ser possível operar com essa nova espécie de radical. Em vez de escrever sobre 2 + $\sqrt{-121}$ como "dois mais a raiz quadrada de menos 121", ele escrevia " dois mais de menos a raiz quadrada de 121”, de modo que “mais de menos” se tornou código para somar raiz quadrada de um número negativo. Obviamente subtrair tal raiz quadrada tornou-se “menos de menos”.

Ele também se referia a isso como “dois mais de menos 11”. E explicava as regras de operação assim:

mais de menos vezes mais de menos faz menos;
menos de menos vezes menos de menos faz menos;
mais de menos vezes menos de menos faz mais.

Atualmente é natural interpretar isso como:

i vezes i é -1;
$-i$ vezes $-i$ é -1;
i vezes $-i$ é 1.

Bombelli começou a operar com raízes quadradas negativas aplicando as regras usuais da Álgebra e mostrou que trabalhar com tais raízes era necessário para encontrar soluções reais.

Tal fato fez com que outros matemáticos passassem a utilizar as raízes quadradas de números negativos, mesmo que ainda o fizessem de forma desconfiada. Mas foi só em 1629 que o símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido por Albert Girardi. Em 1777, Leonhard Euler utilizou o símbolo i pela primeira vez para representar a $\sqrt{-1}$. Porém o i só apareceu impresso pela primeira vez em 1794.

O uso de tal símbolo por Gauss, em 1801, foi o que o tornou amplamente aceito entre os matemáticos, e também é devido a Gauss o termo “ números complexos”.

Alguns anos mais tarde, William Rowan Hamilton propôs uma nova abordagem na qual inicialmente utilizava-se o plano de Gauss, definia-se a soma e o produto de pares ordenados de maneira conveniente e chegava-se a algo que era idêntico aos Números Complexos. Tal abordagem acabava com o misterioso i, pois ele simplesmente correspondia ao ponto (0,1).

Nessa época Hamilton tinha remodelado partes significativas da Física, utilizando os Números Complexos. Já Euler e Gauss mostraram a utilidade dos complexos na Álgebra e na teoria dos números. Riemann, Weierstrass e outros tornaram tais números uma ferramenta matemática importante tanto na Matemática Pura quanto na Matemática Aplicada.

Ensino dos Números Complexos no Brasil

Desde o século XVI a Matemática integra o currículo da escola no Brasil.

> O ensino secundário brasileiro, entretanto, percorreu um longo caminho desde o descobrimento do Brasil, em pleno Renascimento, até 1931 para começar a ser organizado em um sistema nacional. O ensino de Matemática, também, teve um longo caminho a percorrer. Num primeiro momento, para conseguir que suas várias áreas fossem consideradas importantes para a formação geral do estudante. Num segundo momento, para modernizar seus conteúdos. (MIORIM 1998, p.81)

O ensino da Matemática no Brasil começou com os jesuítas, que fundaram um colégio no Rio de janeiro em 1573, o qual tinha como objetivo formar rapazes para servir à Igreja.

Até 1759 os padres da Companhia de Jesus dominaram o ensino brasileiro e as escolas secundárias difundiam a tradição clássico-humanista, que defendia uma educação baseada apenas nas humanidades clássicas, cujas disciplinas eram a retórica, as humanidades e a gramática. As ciências e, em particular, a matemática eram reservadas apenas aos estudos superiores, e eram estudadas de forma superficial.

Em 1757, foi criada a Faculdade de Matemática junto ao colégio de Salvador e, a partir da expulsão dos jesuítas, em fins de 1759, os estudantes graduados em tais escolas não tiveram reconhecimento de seus cursos, devendo prestar exame de equivalência em Coimbra.

Com a expulsão dos jesuítas surgiram as aulas régias, aulas avulsas ou de disciplina isolada, como eram conhecidas, que foram criadas com a Reforma Pombalina em Portugal, inspiradas nas ideias francesas. Tinham o objetivo de preencher as lacunas deixadas pelas escolas dos jesuítas. Porém estas aulas representaram um retrocesso no ensino, uma vez que não tinham um planejamento de trabalho escolar nem professores com a formação adequada (BARBOSA, 2004, p.31).

Apesar do fracasso das aulas régias, houve um movimento positivo no sentido de modificar os conteúdos escolares, sendo, então, introduzidas novas disciplinas, tais como a Aritmética e a Álgebra. Essas aulas, entretanto, não atingiam um grande público, a frequência era muito pequena.

Nessa fase, as escolas eram somente para meninos. Mais tarde foram criadas as escolas elementares para as meninas.

Em 1837, o ministro e secretário de estado da Justiça e interino do Império, Bernardo Pereira de Vasconcelos, criou a primeira escola secundária pública do Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II, e modificou radicalmente os programas do ensino da Matemática, de modo que, Aritmética, Geometria e Álgebra ocupassem seu lugar em todas as oito séries do curso (MIORIM, 1998, p.86).

O primeiro ministro Benjamin Constant, em 8 de novembro de 1890, baixou um decreto, sob o número 891, que determinava a eliminação das disciplinas tradicionais, como o latim e o grego, e a inclusão do ensino de Matemática abstrata bem como da Matemática concreta. Na Matemática abstrata, as atividades não se referem ao mundo real e sim ao mundo mental. Tais atividades envolvem demonstrações e deduções. Já no que diz respeito à Matemática concreta, o sujeito estabelece uma relação com o mundo real através de observações e experimentações.

Nenhuma das várias reformas que ocorreram depois da de Benjamin Constant produziram mudanças significativas no ensino brasileiro. Somente na década de 20 começaram as alterações no panorama da Educação em nosso país.

A reforma dos currículos no ensino, principalmente nos currículos do Colégio Pedro II, aconteceu no ano de 1929, no curso de Matemática Elementar.

Foi o professor catedrático de Matemática Euclides Roxo o maior responsável pela proposta modernizadora brasileira, unificando o estudo de Álgebra, Geometria e Aritmética, que até então eram estudadas separadamente e avaliadas em um exame para cada conteúdo. Essa proposta foi homologada pelo decreto número 18564, na data de 15 de janeiro de 1929. Era apenas para o Colégio Pedro II e nada garantia que as outras instituições de ensino seguiriam tais orientações, apesar do Colégio ser considerado modelo.

De acordo com Souza (2009, p. 77), Francisco Campos fez a primeira tentativa de estruturar o curso Secundário Nacional e de introduzir os princípios modernizadores da Educação, trazendo a ideia principal de que a "qualidade da educação não se mede pelo volume de noções e dos conceitos". Foi através dessa reforma que o currículo seriado surgiu, com a frequência obrigatória em dois ciclos: um fundamental e outro complementar, sendo que a conclusão destes era a exigência para o ingresso no ensino superior.

Todas as mudanças provocadas pelos movimentos para a modernização da Matemática – Reforma de Euclides Roxo e Movimento da Matemática Moderna –, cada um no seu tempo e com seus objetivos específicos, influenciaram profundamente o ensino da Matemática daquele momento em diante.

Em 1942, a Reforma Capanema fixou o Curso Ginasial em 4 anos, já que até 1942 o ginasial compreendia 5 anos, sendo o ano de 1943 o marco inicial dessa reforma.

Em 1943, no ensino ginasial, o que era denominado de “Números Complexos” não tinha o mesmo significado matemático que possui atualmente (Conjunto dos Números Complexos). Tal fato pode ser observado no trecho do livro de Stávale (1943), que era utilizado nas aulas da 1ª série ginasial.

CAPÍTULO VII

Números Complexos

168. Preliminares. Já conhecemos o metro, com seus múltiplos e submúltiplos. (*) Sabemos que um metro tem 10 decímetros; um decímetro tem 10 centímetros; um centímetro tem 10 milímetros. Sabemos mais que 10 metros formam um decâmetro; 10 decâmetros formam um hectômetro; 10 hectômetros formam um quilômetro.

O metro, seus múltiplos e submúltiplos são unidades para medir uma certa classe de grandezas, por exemplo, os segmentos retilíneos. Estas várias unidades guardam entre si uma relação invariável, a saber:

Cada unidade de comprimento vale **dez** *unidades da ordem imediatamente inferior;* **dez** *unidades de comprimento, de uma mesma ordem, formam* **uma** *unidade da ordem imediatamente superior.*

Portanto, as unidades de comprimento são representadas tal qual como as unidades do sistema decimal de numeração; *os metros são as unidades de primeira ordem; os* **decâmetros** *são* **dezenas**; *os* **hectômetros** *são* **centenas**; *os* **decímetros** *são* **décimos**, *etc.*. E nisto consiste a grande simplificação que se conseguiu nos cálculos, substituindo os antigos sistemas de medidas pelo sistema métrico decimal.

Mas, para medir certas grandezas, não se adotam as unidades indicadas no sistema métrico decimal e sujeitas, portanto, à *divisão decimal*. Donde resulta, da avaliação destas grandezas, uma classe especial de números, **os números complexos.**

Stávale (1ª série), 1943, p.236

A designação “Números Complexos” era utilizada para determinar números formados por unidades diferentes, embora de mesma natureza como, por exemplo, as unidades de tempo e monetárias:

170. Unidades de tempo. Os números complexos mais conhecidos são os que empregamos para medir a *grandeza* **tempo.**

As unidades usuais de tempo são o ano, o mês, o dia, a hora, o minuto e o segundo.

Damos a seguir o quadro destas unidades, com as suas abreviaturas legais e a relação existente entre duas unidades consecutivas.

1 **ano**	(a)	= 12 **meses**
1 **mês**	(m)	= 30 **dias**
1 **dia**	(d)	= 24 **horas**
1 **hora**	(h)	= 60 **minutos**
1 **minuto**	(m)	= 60 **segundos**

Portanto, 3a. 7m. 10d. significa 3 *anos*, 7 *meses* e 10 *dias*; 15h. 45m. 36s. significa 15 *horas*, 45 *minutos* e 36 *segundos*.

Stávale, 1943, p.237

Atualmente o ensino dos Números Complexos, no Brasil, segue, de maneira geral, priorizando a abordagem algébrica. Mas acreditamos que é possível priorizar o enfoque geométrico. Concordamos com Carneiro (2004) que nos adverte de que

> O enfoque algébrico permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas a experiência tem mostrado que quando se perde a chance de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, em geral esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece (quando aparece) a “forma trigonométrica”.

Dessa forma, dificilmente o aluno perceberá que os Números Complexos podem ser aplicados na resolução de problemas de Geometria e, também não se beneficiará da sua visualização. O fato de enxergar os Números Complexos em um plano atribui a eles o seu merecido significado. Ou seja, eles deixam de ser imaginários” e se transformam em “reais”.

Precisamos mostrar as aplicações dos Números Complexos em outras áreas do conhecimento, tais como: circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia, motores e mecânica quântica.

O uso das TICs no ensino dos Números Complexos

O uso das tecnologias de informação e comunicação (TICs) pode ser uma ferramenta importante no processo da construção do conhecimento matemático dos alunos, visto que a visualização é o terceiro hábito de pensamento matemático que deve ser privilegiado e diz respeito à capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns da realidade (GOLDENBERG, 1998).

> [...] o computador constitui hoje uma preciosa ferramenta capaz de apoiar a formulação de conjecturas, o estabelecimento de provas e de aprofundar o conhecimento sobre objetos que ajuda a visualizar. (SILVA et al., 1999, p.70)

As possibilidades que as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) representam, em termos de recursos didáticos, permitem práticas docentes mais coerentes com o perfil dos alunos das atuais sociedades. Atualmente temos à disposição vários *softwares* de Geometria Dinâmica que possibilitam a visualização das operações com Números Complexos. Entre eles salientamos o *software* livre Geogebra, que possibilita somar, subtrair, multiplicar e dividir Complexos, geométrica e vetorialmente, além de apresentar o conjugado e as raízes de tais números.

Considerações Finais

Acreditamos que ensinar e praticar uma Matemática atualizada e relevante para o aprendizado dos alunos é um dos grandes desafios da Educação Matemática atual.

Propor novas abordagens para antigos conteúdos não garante que o ensino torna-se relevante, mas o ato de pensar e elaborar uma nova proposta já seria um começo.

Cremos que para nos apropriarmos de um conteúdo seja necessário, entre outras coisas, conhecer a sua dimensão histórica. Assim, a nossa proposta de dissertação tem como objetivo retomar a abordagem dos Números Complexos apresentada por Hamilton, na qual é utilizada a ideia de definir soma e produto de pares ordenados, possibilitando assim a correspondência do ponto (0,1) com a unidade imaginária *i*.

Dessa forma os Números Complexos serão abordados inicialmente na forma geométrica conforme Carneiro (2004) sugere:

> A humanidade levou milhares de anos para descobrir os complexos, mas somente 200 anos após começou a perceber o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação dessa descoberta. Passados outros 200 anos, o ensino dos números complexos necessita beber mais nessa fonte que é a abordagem geométrica dos números complexos [...]. (CARNEIRO, 2004, p. 24).

Fundamentados na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, faremos as devidas articulações entre os Números Complexos e seus múltiplos registros de representação e suas interpretações geométricas no plano.

Concordamos com a citação utilizada por D'Ambrósio (2001, p.14) em seu artigo *Desafios da Educação Matemática no novo milênio* que relata:

> Nós matemáticos muitas vezes temos pouca ideia sobre o que está se passando em ciências e engenharia, enquanto os cientistas experimentais e engenheiros muitas vezes não se apercebem das oportunidades oferecidas pelo progresso da matemática pura. Este perigoso desequilíbrio deve ser evitado trazendo mais ciências para a educação dos matemáticos e expondo os futuros cientistas e engenheiros à matemática central. Isso requer novos currículos e um grande esforço por parte dos matemáticos [...] Necessitamos para isso de uma geração de matemáticos profissionais capazes de trafegar entre matemática pura e ciência aplicada. (Mikhail Gromov, 1995)

Acreditamos que nós matemáticos precisamos utilizar *múltiplos pontos de vista* sobre um mesmo tema. Os Números Complexos apresentam, como mostrado neste texto, uma rica história que proporciona uma articulação entre a álgebra e a geometria. Usufruiremos desses elementos para desenvolver a nossa dissertação e promover diversas aplicações à Física e às Engenharias.

Referências Bibliográficas

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244p.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos In**: Revista do Professor de Matemática**, n. 55. SBM, 3º quadrimestre de 2004.

D‟AMBROSIO, Ubiratan. Desafios da Educação Matemática no novo milênio. **Educação Matemática em Revista**, nº 11, ano 8 (Dez.), p. 14 – 17, 2001.

DUVAL R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**,Peter Lang, 1995

GARBI, Gilberto G.. **A Rainha das Ciências**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GOLDENBERG, E. P. Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, n. 48, p. 37-44. 1998**.**

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

SÃO PAULO. **Caderno do professor**: matemática, ensino médio, 3a série, 2o bimestre. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 2008.

SILVA, A., VELOSO, E.,PORFÍRIO, J., ABRANTES, P.**O currículo de matemática e as Actividades de Investigação.** In: ABRANTES P., PONTE, J. P., FONSECA, H., & BRUNHEIRA, L. (Org). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p. 69-85.

SOUZA, R. F. A. Renovação do Currículo do Ensino Secundário no Brasil: as últimas batalhas pelo humanismo (1920–1960). **Currículo sem Fronteiras**, v. 9, n. 1, p. 72-90, jan./jun. 2009.

STÁVALE, Jacomo. **Elementos de Matemática: 1ª série do Curso ginasial**. 25. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1943.