

# Um Panorama da Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: a perspectiva de David Tall

Marcio Vieira de Almeida<sup>1</sup>

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

## Resumo

No presente artigo apresento a proposta de minha pesquisa de Mestrado, que se encontra em sua fase inicial, no âmbito do Programa de Estudo Pós-Graduados em Educação Matemática de PUC-SP. Trata-se de uma pesquisa teórica que visa a organização de um panorama de artigos de autoria (ou com a colaboração) do pesquisador inglês David Tall, da Universidade de Warwick. O objetivo da pesquisa é o de realizar sínteses de resultados e evidenciar construtos teóricos apresentados nos mesmos buscando contribuir com a análise de dificuldades do ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. A fonte de dados da pesquisa é o sítio acadêmico do pesquisador inglês. No presente artigo exponho o objeto de estudo, objetivos e a sua relevância.

Palavras-chave: Limites, Ensino de Cálculo, Conceito Imagem e Conceito Definição.

## Apresentação/ Introdução

Neste artigo apresento meu projeto de pesquisa que visa a organização de um panorama de artigos de autoria (ou com a colaboração) do pesquisador inglês David Tall, da Universidade de Warwick.

O presente projeto está inserido no campo da Educação Matemática do Ensino Superior. Esse campo se estabeleceu recentemente, tanto no cenário internacional quanto no nacional (Pinto, 2002). As pesquisas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem no Ensino Superior possuem, segundo Iglioni (2009), as seguintes características:

*[...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceito da Matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da Matemática; investigar abordagens de*

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica – PUC-SP; marcioalmeidasp@gmail.com

*ensino que favoreçam apreensão dos conceitos, entre outros temas (p. 12).*

Em vista dessas peculiaridades o campo comporta um corpo teórico próprio. Dentre os pesquisadores que se debruçam sobre os problemas e especificidades da Educação Matemática no Ensino Superior destaco o trabalho de David Tall pesquisador da Universidade de Warwick, no Reino Unido. A seguir apresento alguns dados sobre a biografia desse importante autor.

Tall cursou a graduação em Matemática no *Wadham College* de Oxford, no período 1960 a 1966. Nessa mesma instituição obteve o doutorado em Matemática no ano de 1967. Nos anos de 1966 a 1969 foi professor de Matemática na *Sussex University* quando escreveu o seu primeiro livro *Functions of a Complex Variable*. Desde 1969, ele fez parte do corpo docente da Universidade de Warwick e obteve o doutoramento em Educação, no ano de 1986. No período de 1969 à 1980 Tall lecionou aulas de Matemática, com interesse especial em Educação, no *Mathematics Institute* do Departamento de Ciência da Educação, no período de 1980 a 1994, onde ele atuou como professor pleno. No final desse período aposentou-se por motivos de saúde permanecendo como membro, em tempo parcial, do *Institute of Education* da Universidade de Warrick, onde ele escolheu ser denominado *Professor*<sup>2</sup> em Pensamento Matemático. Outro ponto importante da biografia desse brilhante autor é a organização do livro *Advanced Mathematical Thinking* (Tall, 1991). Esse livro trouxe o resultado das discussões do grupo de trabalho criado no ano de 1985, o Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (IGPME, comumente abreviado como PME). Esse livro contou com a participação de pesquisadores como Ed Dubinsky, Michèle Artige, Sholmo Vinner, Bernard Cornu, Tommy Dreyfus, dentre outros.

Uma das contribuições desse pesquisador a ser destaca é a proposição do construto teórico: conceito imagem e conceito definição. Esse construto foi elaborado em parceria com o pesquisador Shlomo Vinner. O conceito imagem é descrito como:

*[...] a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, a qual inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos por*

---

<sup>2</sup> Segundo o dicionário eletrônico *Cambridge Dictionaries Online* a palavra inglesa *Professor* significa o “professor que possui o maior grau de uma universidade britânica, ou um professor de alto escalão em uma universidade ou faculdade americana” (Tradução nossa). Endereço eletrônico do dicionário consultado: <http://dictionary.cambridge.org/>

*meio das experiências de todos os tipos, mudando quando o sujeito encontra novos estímulos e amadurece* (1981, p. 152).<sup>3</sup>

E o conceito definição como:

*[...] a forma que as palavras foram utilizadas para especificar aquele conceito. Ele pode ser aprendido por um sujeito de uma forma rotineira ou aprendido mais significativamente e relacionado, em maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante de uma definição* (1981, p. 152).<sup>4</sup>

A proposta é então elaborar um panorama dos artigos do Tall e realizar sínteses de resultados e evidenciar construtos teóricos apresentados nos mesmos buscando contribuir com a análise de dificuldades do ensino e aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Tais artigos são buscados no sítio acadêmico do pesquisador<sup>5</sup>, em específico em uma seção, com um total de 15 artigos. O estudo refere-se ao ensino e aprendizagem do Cálculo considerando sua importância na constituição de noções fundamentais para a Matemática (Iglioni 2009, p. 13), tais como conceito de número real, infinito, funções, entre outros.

Um ponto que vale a pena ser salientado da proposta de pesquisa é a escolha de artigos como o meu objeto de estudo. Isso se deve à adoção dos argumentos de Burzty, Drummond e Nascimento (2010) quais sejam, é por meio dos artigos que os pesquisadores de todo o mundo podem:

*[...] divulgar os resultados de suas pesquisas, os métodos que usam, os conceitos que adotam ou propõem, as teorias que os orientam* (p. 17).

Essa citação reforça o fato de que os artigos são importante canal de comunicação entre pesquisadores. Suponho que por meio dos artigos o panorama pretendido represente pensamentos do autor sobre o ensino do Cálculo.

A relevância deste estudo no cenário do ensino e aprendizagem de Matemática do Ensino Superior está no entendimento de que sínteses são necessárias, de que a comunidade de pesquisa precisa mapear linhas de pesquisa em desenvolvimento, e deve

---

<sup>3</sup> Tradução nossa.

<sup>4</sup> Tradução nossa.

<sup>5</sup> Endereço eletrônico: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>. Acesso em: 12 de setembro de 2012.

buscar canais que desenvolverão práticas educacionais coerentes nessa modalidade de ensino (MAMONA – DONWS e DOWNS 2008, p. 154).

No restante do artigo mostro quais foram as atividades realizadas por mim até presente momento sendo que na última seção exponho quais serão os próximos passos deste projeto de pesquisa.

### **Percurso da presente pesquisa**

Com o foco do projeto de pesquisa em mente, e, visando dimensionar o peso da entre as pesquisas brasileiras da utilização das teorias de Tall realizei inicialmente busca no banco de teses de dissertações da CAPES<sup>6</sup>. Abaixo descrevo como foi feita a referida busca.

Utilizei a ferramenta de busca disponível no sítio sob o critério “Assunto” com as palavras “Cálculo Diferencial e Integral”. Após isso, obtive um total de 136 dissertações e teses de Instituições de Ensino Superior espalhadas por todo o território nacional. Do montante total de pesquisas, primeiramente, excluí aquelas que não se relacionavam ao campo da Educação Matemática. Em resultado dessa análise restaram 88 pesquisas. Desse novo conjunto de trabalhos, por motivos de dificuldade de encontrar versões digitais das dissertações e teses, resolvi considerar apenas pesquisas posteriores ao ano 2000, com isso obtive um total de 72 trabalhos. Por fim, um último corte no conjunto de trabalhos foi necessário ser feito, porque, mesmo entrando em contato com os pesquisadores responsáveis pelas pesquisas e consultando sítios de bibliotecas digitais de várias IES, não foi possível encontrar a versão digital de alguns trabalhos, com isso a nossa amostra final conta com 58 pesquisas.

Desse total de teses e dissertações procurei no texto de cada uma delas a existência de uma (ou mais) citações do pesquisador David Tall. Após essa primeira análise eu obtive o total de 23 pesquisas que citavam o pesquisador. Analisei cada pesquisa que satisfizesse o critério anterior, com o objetivo de compreender o contexto de cada uma das citações do autor. Após análise foram identificadas oito pesquisas (sete dissertações e uma tese) nas quais Tall é referencial teórico. A seguir apresento, de maneira sintética tais pesquisas, com o intuito de indicar quais elementos teóricos de Tall são utilizados no ensino de Cálculo Diferencial Integral.

---

<sup>6</sup> Endereço eletrônico: <http://capesdw.capes.gov.br/capesdw/>. Acesso em: 29 de agosto de 2012.

Do total de oito pesquisas encontradas no levantamento quatro utilizaram o construto teórico conceito e conceito definição.

Miranda (2010) em seu trabalho desenvolveu uma proposta de ensino e aprendizagem para Cálculo Diferencial e Integral, na qual os conteúdos envolvidos foram funções de duas variáveis e gráficos do  $R^3$ , com auxílio de uma tecnologia: a informática.

Souza (2007) analisou as relações entre as concepções sobre o conceito de Integral revelada por professores, bem como a maneira que eles analisam a produção dos alunos, de forma a obter indícios sobre as práticas educativas desses profissionais.

Abreu (2011) analisou relações entre a intuição e o rigor e entre imagem conceitual e definição conceitual manifestadas por 56 alunos, que cursavam Cálculo I em relação aos conceitos de limite e continuidade.

Luz (2011) em sua dissertação investigou e analisou, qualitativamente, os resultados obtidos por uma proposta de intervenção, na qual um curso de Cálculo foi ministrado sob a perspectiva da resolução de problemas em um ambiente computacional.

O segundo elemento teórico, de Tall, destacado no levantamento de teses e dissertações foi a utilização do computador e *software* no ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática avançada. Esses elementos “são fontes ricas de imagens visuais que seriam, por vezes, impossíveis de serem obtidas sem esse recurso” (Barbosa, 2009, p. 57). Sobre a utilização do computador e *softwares*, Tall e Dubinsky (1991, p. 236) afirmam que eles podem ser considerados como:

*[...] uma ferramenta – uma ferramenta poderosa – mas qualquer ferramenta pode somente ser utilizada na sua capacidade máxima por aqueles que vão utilizá-las. A situação é paralela ao uso de uma calculadora simples: elas não ensinam a criança como somar (ou dividir), mas elas são ferramentas úteis para somar e dividir quando se conhece a aritmética.*<sup>7</sup>

Ainda Tall (2000) considera o computador e os *softwares* como organizadores genéricos<sup>8</sup>, ele define esse elemento como:

*[...] um ambiente (ou micromundo), o qual permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um*

---

<sup>7</sup> Tradução nossa.

<sup>8</sup> Tradução do termo *generic organiser* (TALL 2000, p. 13).

*conceito matemático específico ou um sistema relacionado de conceitos* (p. 13).<sup>9</sup>

Nessa perspectiva foram observadas duas dissertações e uma tese. A primeira pesquisa é de Santos (2008) na qual os sujeitos eram alunos, do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática, que cursavam Cálculo Diferencial e Integral II desenvolvido por meio de modelagem matemática mediadas pelo uso do computador.

A segunda pesquisa, a tese de Barbosa (2009), teve por objetivo investigar como um coletivo formado por alunos ingressantes no curso de Matemática produz os conhecimento de Função Composta e Regra da Cadeia.

Por fim, a última pesquisa foi Fonseca (2011) na qual o pesquisador analisou qual o impacto da utilização das novas tecnologias na visualização e representação de superfície geométrica, dando ênfase às quádricas. Os sujeitos de pesquisa foram alunos de um curso de Engenharia.

O último tópico que eu destaco dentre os elementos teóricos de David Tall é a função da visualização (Tall, 1991) na aprendizagem. Segundo esse pesquisador, negar esse elemento no ensino da aprendizagem “é negar as raízes de muitas de nossas ideias matemáticas mais profundas”<sup>10</sup> (ibidem, p. 1). O trabalho que eu encontrei nessa perspectiva foi Couy (2008). O pesquisador investigou o uso do pensamento visual no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, especificamente, os conceitos relativos às variações de funções reais de uma variável.

Essa busca, no banco da CAPES, possibilitou a constatação de que elementos teóricos de Tall, em certo grau, são utilizados em pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral em nosso país.

A análise dos artigos da seção *Limits, Infinity & Infinitesimals* e das dissertações e teses aqui apresentadas de forma sucinta, reforçou a minha percepção da importância de Tall como teórico da Educação Matemática do Ensino Superior, o que deve ser cada vez mais confirmado com a finalização do levantamento bibliográfico, ainda em andamento.

Destaco a seguir procedimentos que nortearão a análise dos documentos da seção selecionada.

Este projeto de pesquisa insere-se entre as pesquisas histórico–bibliográficas. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 102) nesse tipo de pesquisa a coleta de

---

<sup>9</sup> Tradução nossa.

<sup>10</sup> Tradução nossa.

informações é feita por meio de fichamentos de leituras. Esses elementos ajudam a organizar de maneira sistemática os registros relativos a informações obtidas. A seguir, exibo quais são os itens dessa primeira ficha de leitura.

Para a construção da ficha de leitura dos artigos consultamos Fiorentini (1994). Os trabalhos de Junho (2003), Oliveira (2003) e Ardenghi (2008) também auxiliaram nessa construção. Como os documentos considerados neste projeto são artigos considere também as indicações de Bursztyn, Drummond e Nascimento (2010). Até o presente momento a coleta de dados foi organizada a partir de uma ficha de leitura com os seguintes itens:

- 1) Autores;
- 2) Título do trabalho;
- 3) Ano de publicação;
- 4) Local e evento onde o artigo foi publicado;
- 5) Nota existente no site do autor;
- 6) Nível de ensino investigado no artigo;
- 7) Problemática;
- 8) Tópico matemático considerado no artigo;
- 9) Referencial teórico do artigo;
- 10) Resenha do artigo;
- 11) Resultados obtidos;

### **Considerações finais**

Neste texto apresentei o percurso do projeto de pesquisa realizado até o presente momento, onde levantei algumas pesquisas, no âmbito nacional, que utilizaram os elementos teóricos concebidos por, ou com colaboração, de David Tall e procedimentos para a elaboração da ficha de leitura utilizada para coletar os dados dos artigos da seção *Limits, Infinity & Infinitesimals* do sítio acadêmico do pesquisador<sup>11</sup>.

A leitura dos artigos está sendo finalizada, sendo assim os próximos passos seriam: alistar os elementos teóricos desenvolvidos por David Tall e ampliar o estudo de cada um desses. Em seguida, procuro relacionar os tópicos do Cálculo Diferencial e Integral com cada um dos construtos teóricos analisados. Por fim, pretendo refletir sobre as sínteses dos resultados dos artigos sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo.

---

<sup>11</sup> Endereço eletrônico: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/limits-infinity.html>

### Referências Bibliográficas

- ABREU, O. H. **Discutindo Algumas Relações Possíveis Entre Intuição e Rigor e Entre Imagem Conceitual e Definição Conceitual no Ensino de Limites e Continuidade em Cálculo I**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.
- BARBOSA, S. M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.
- BARROSO, N. M. C.; BORGES NETO, H.; MOTA, J. C.; SOARES, J. M. Limite: definição intuitiva versus definição formal. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). **Educação Matemática no ensino superior: pesquisa e debates**. Recife: SBEM, v. 5, p. 99 – 110, 2009.
- BURSZTYN, M.; DRUMMOND, J. A.; NASCIMENTO, E. P. **Como escreve e publicar um trabalho científico: Dicas para pesquisadores e jovens cientistas**. Rio de Janeiro: Garamond, p. 17 – 41, 2010.
- COUY, L. **Pensamento Visual no Estudo da Variação de Funções**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- FIORENTINI, D. **Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação: Metodologia de Ensino) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3ª Edição. Campinas: Autores Associados, 2007.
- FONSECA, R. C. **Uma Abordagem Geométrica para Cálculo do Volume das Quádricas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2011.
- IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L.(Org.) **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**, Recife: SBEM, p. 11 – 26, 2009.

- JUNHO, B. A. P. **Panorama das Dissertações em Educação Matemática sobre o Ensino Superior da PUC/SP de 1994 a 2000.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.
- LUZ, V. M. **Introdução ao Cálculo: uma Proposta Associando Pesquisa e Intervenção.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- MAMONA- DOWNS, J.; DOWNS, M.L.N. Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. In: ENGLISH, L. (Org.) **Handbook of International Research in Mathematics Education.** 2ª edição. New York: Routledge, p. 154 – 174, 2008.
- MIRANDA, A. M. **As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 1991.
- OLIVEIRA, E. A. **A Educação Matemática & Ensino Médio: um panorama das pesquisas produzidas na PUC/SP.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.
- PINTO, M. M. F. Educação Matemática no Ensino Superior. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, p. 223 – 238, 2002.
- REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologia de informação e comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.
- SOUZA, F. E. **A Integral de Visão de Professores de Cálculo Diferencial e Integral Frente à Produção de Alunos.** Dissertação (Mestrado em Educação de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics** 12, p. 151 – 169, 1981.
- TALL, D. O. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991.

TALL, D. O. **Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus**. MAA Notes, n° 19, p. 105 – 119, 1991.

TALL, D. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: **Asian Technology Conference in Mathematics**, 5, 2000, Chiang Mai. *Proceedings...* Blackwood: ATCM Inc., 2000.