Instrumentos Virtuais de Desenho e a Argumentação em Geometria

Fábio Luiz Fontes Martins[1]

GD6 – Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

RESUMO

Este artigo apresenta uma proposta para trabalhar, na escola, com a argumentação dedutiva em geometria. A proposta faz uso de material digital consistindo de instrumentos virtuais de desenho que realizam as transformações de translação, reflexão, rotação e ampliação. Para o trabalho em sala de aula elaboramos uma sequência didática composta por três etapas – atividades de exploração, de construção e de argumentação. No laboratório de informática, os alunos sujeitos da experiência didática foram instigados a explorar os instrumentos virtuais, expressando seu entendimento inicial; depois fizeram a construção dos instrumentos usando o software GeoGebra; e finalizaram o trabalho com a argumentação dedutiva que explica a transformação geométrica realizada pelo instrumento. Para compreensão da evolução dos alunos e de suas dificuldades utilizamos a teoria de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e a teoria dos registros de representações semióticas de Duval.

Palavras-chave: Argumentação. Geometria. Instrumentos virtuais.

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento em geometria é importante, pois o mundo em que vivemos é repleto de formas e de relações entre seus elementos. Na antiguidade, as primeiras ideias sobre geometria eram empíricas, e é de forma gradativa que esse conhecimento evolui até chegar no que chamamos de geometria dedutiva. A evolução do pensamento possibilitou ao homem refletir sobre o conhecimento geométrico, assim construindo as primeiras argumentações. E esse processo dedutivo culminou com a organização do conhecimento na forma de axiomas, de definições, de teoremas e de demonstrações (BOYER, 2012; EVES, 2011).

Como o desenvolvimento da geometria empírica à geometria dedutiva levou muito tempo, isto nos ajuda a entender o quão difícil é, para os alunos da escola básica, a

[1] Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática - UFRGS, E-mail: fabiom7@hotmail.com

produção de argumentos dedutivos. Para eles, atingir o estágio de entendimento da geometria dedutiva não é uma tarefa simples.

Quando falamos de demonstrações em matemática, isto remete ao uso de uma linguagem matemática impecável. Porém, no ensino da geometria na escola básica, é interessante iniciar com as ideias que os alunos trazem de suas experiências com o mundo físico e então ir avançando, de forma gradativa, com novas ideias e com os cuidados quanto à linguagem matemática. Acreditamos que o professor precisa interferir no processo de construção de argumentações, nisso instigando os alunos e apontando caminhos. A orientação dada no PCN justifica nossa posição:

> Mesmo que a argumentação e a demonstração empreguem, frequentemente, os mesmos conectivos lógicos, há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação. O refinamento das argumentações produzidas ocorre gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando as demonstrações. (BRASIL, 1998, p.86)

É levando em consideração esta orientação que procuramos desenvolver um material didático que fosse atrativo para os alunos e que possibilitasse o trabalho com a argumentação dedutiva[2]. Na concepção do material integramos o potencial da tecnologia informática nos processos de aprendizagem e, assim, temos como produto quatro instrumentos virtuais de desenho que realizam as transformações geométricas de reflexão, de rotação, de translação e de ampliação[3]. Mas o material, por si só, não garante a aprendizagem que estamos almejando - julgamos que a condução dos trabalhos, a ser feita pelo professor, é de fundamental importância. Assim, também nos preocupamos com a elaboração de uma sequência didática para acompanhar a utilização do material. Neste artigo apresentamos o material didático e a experiência que fez a sua validação.

---

[2] O material didático foi desenvolvido como parte da Dissertação de Mestrado, que está em andamento no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS.

[3] Links para páginas dos instrumentos virtuais:
Página web 1: http://www.geogebratube.org/student/m6460;
Página web 2: http://www.geogebratube.org/student/m6468;
Página web 3: http://www.geogebratube.org/student/m10192;
Página web 4: http://www.geogebratube.org/student/m10196.

2 O MATERIAL DIDÁTICO "INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO"

Os instrumentos físicos foram idealizados no trabalho de construção de máquinas durante o século XV e XVI. Atualmente, existe um museu italiano chamado *Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica*[4], da universidade *Universitá Degli Studi di Modena e Reggio Emilia*, que mantém muitos instrumentos de desenhos e outras máquinas projetadas com elementos de geometria. O Museu possui um *website* com interessante coleção: são fotos de instrumentos que estão expostos no Museu, com a descrição das propriedades geométricas que garantem os diferentes funcionamentos; muitos dos instrumentos podem ser manipulados em versão virtual, tendo-se neles uma "ponta seca" comandando uma "ponta lápis".

Encontramos, nesse acervo virtual, referências de que, há tempos, o homem busca soluções práticas para facilitar seu dia-a-dia, inventando máquinas. Essas invenções começam a ter destaque desde os tempos da Grécia Antiga, com o aperfeiçoamento do pensamento geométrico e com o início da Geometria Dedutiva.

Atualmente, o museu tem por interesse manter a história da geometria aplicada à mecânica através de instrumentos articulados – dentre eles o pantógrafo, o rotor, o refletor e o translator. Foi partindo do pressuposto de que a engenhosidade presente nesses instrumentos pode despertar a curiosidade dos alunos, é que nos dedicamos ao estudo deste assunto, para então tratar da produção do material didático.

O material didático produzido está disponível virtualmente para professores e alunos no *GeoGebra Tube*, e contém os instrumentos virtuais de desenho construídos com o software *GeoGebra*. Construímos quatro páginas, uma para cada instrumento: refletor, rotor, translator e pantógrafo. A estrutura e as atividades das páginas são semelhantes, sendo distinto, apenas, o conteúdo, de acordo com o instrumento. Na Figura 1, por exemplo, temos a página do instrumento pantógrafo.

---

[4] Disponível em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm. Acesso em 14/02/2012.

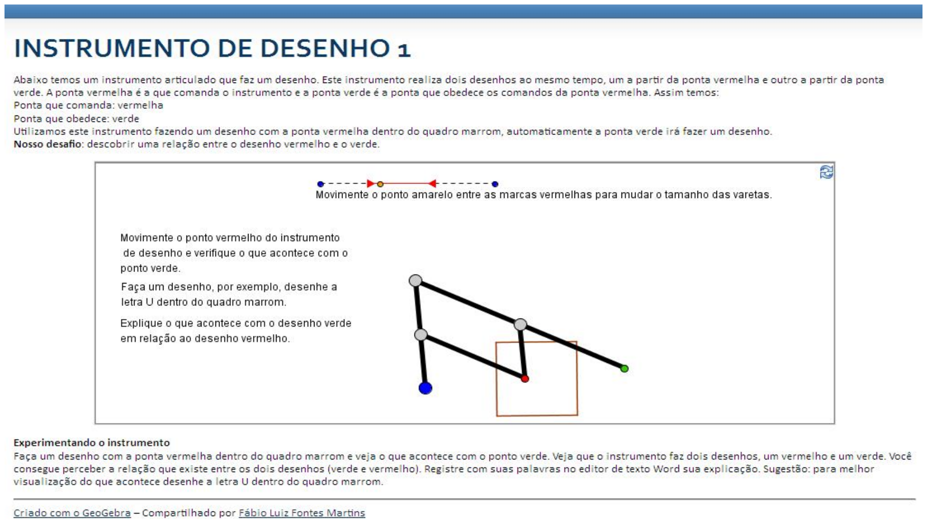

Figura 1: Página web do Pantógrafo
Fonte: *GeoGebra Tube*, compartilhado por Fábio Luiz Fontes Martins

É para que o leitor melhor entenda o espírito do trabalho desenvolvido na experiência a ser apresentada na próxima sessão, que apresentamos, no que segue, o procedimento de construção do pantógrafo e a argumentação que explica a transformação de ampliação que ele realiza.

O protocolo de construção do pantógrafo está organizado em 13 passos, ilustrado nas Figuras 2 e 3. Os passos são: *1º passo:* pontos ***F*** e ***S***; *2º passo:* Construa circunferência ***C1*** (de raio 2) com centro em *F* e circunferência ***C2*** (de raio 2) com centro em *S*; *3º passo:* Construa o ponto ***A*** de intersecção entre as circunferências *C1* e *C2*; *4º passo:* Construa uma circunferência ***C3*** (de raio 1) com centro em *A*; *5º passo:* Construa o ponto ***B*** de intersecção da reta *FA* com *C3*, sendo que *A* fica entre *F* e *B*; *6º passo:* Construa uma reta ***r*** passando por *F* e *B*; *7º passo:* Construa o segmento ***AS***; *8º passo:* Construa uma reta ***s*** paralela a *AS*, passando por *B*; *9º passo:* Construa uma reta ***t*** passando por *F* e *S*; *10º passo:* Construa ponto ***L*** de intersecção entre as retas *s* e *; 11º passo:* Construa a reta ***u*** paralela a *AB* passando por *S*; *12º passo:* Construa o ponto ***D*** de intersecção entre as retas *s* e *u*; *13º passo*: Construa (destaque com cor diferente) os segmentos *FB*, *BL*, *AS* e *SD*.

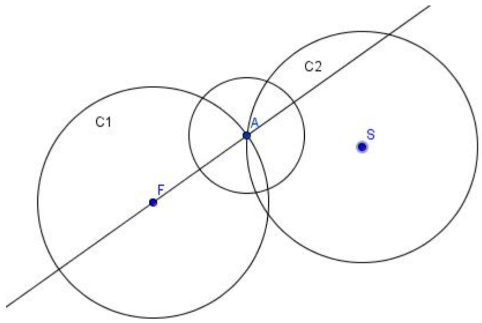

Figura 2: 1º ao 4º passo
Fonte: Autor

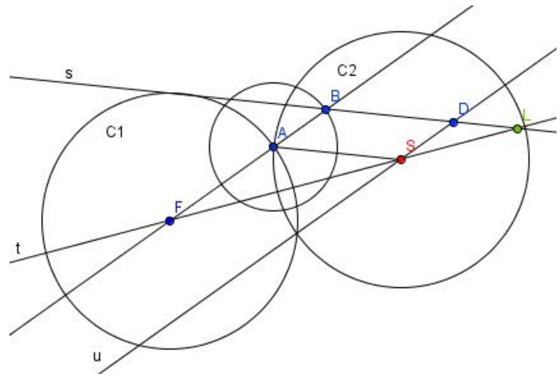

Figura 3: 5º ao 13º passo
Fonte: Autor

Quanto à argumentação, é importante ter clareza que, no pantógrafo as propriedades que garantem que ele faz uma ampliação são duas: a) o ponto *S* sempre pertence a reta determinada pelos pontos F e L, ou seja , os pontos F, S e L estão sempre alinhados*;* b) a razão FL/FS é sempre igual a FB/FA e esta é a razão de ampliação.

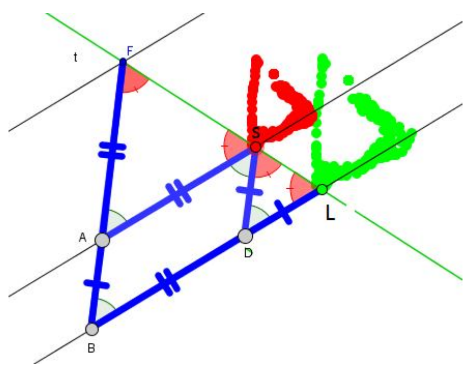

Figura 4: Esquema argumentação
Fonte: Autor

Para mostrarmos que o ponto *S* pertence à reta *FL*, utilizaremos um fato de alinhamento de três pontos. Assim, precisamos mostrar que as semi-retas *SL* e *SF* são opostas. Como *ABDS* é paralelogramo, os ângulos opostos (destacados em verde) são congruentes. O triângulo *FAS* é isósceles, tendo dois ângulos vermelhos e um ângulo verde, sendo que este ângulo verde do triângulo é congruente ao ângulo verde do paralelogramo (por ângulos correspondentes em retas paralelas). O mesmo acontece com o triângulo *SDL*. No triângulo *FAS* temos: *(2 ângulos vermelhos) + (1 ângulo verde) = 180º*. Estes ângulos também estão em torno de S, sendo formados pelas semi-retas *SF*, *SA*, *SD* e

SL, conforme a figura. Assim, *(2 ângulos vermelhos) + (1 ângulo verde)* somam 180º, daí o alinhamento de *F,S e L*. Para mostrar que *FL/FS=FB/FA,* utilizamos o Teorema de Tales, conforme observamos com as três retas paralelas (Figura 4). De fato, como temos três retas paralelas, e FB e FL são transversais, pelo Teorema de Tales temos *FL/FS=FB/FA.*

Na nossa proposta de experiência, tomamos como pressuposto, que é possível trabalhar com os alunos do ensino médio procedimentos de construção e argumentações dedutivas no espírito apresentado acima. É disto que vamos tratar a seguir.

3 UMA EXPERIENCIA DE ENSINO COM O MATERIAL DIDÁTICO "INSTRUMENTOS VIRTUAIS DE DESENHO"

A experiência foi realizada no Colégio de Aplicação – UFRGS, com uma turma de 1º ano do Ensino Médio com dezesseis alunos, em seis encontros com duas horas de duração cada um. Para realizar este trabalho desenvolvemos uma sequência didática que contempla três tipos de atividades: de *exploração*, de *construção* e de *argumentação*. Os alunos trabalharam em duplas nas duas primeiras atividades e de forma individual na terceira atividade.

Na *Atividade de Exploração* os alunos manipulam o instrumento virtual, visando entender o seu funcionamento e a transformação geométrica que realiza, e são solicitados a escreverem sobre este entendimento, com suas próprias palavras. Num primeiro momento, os alunos manipulam os instrumentos; no final dessa etapa, a partir das produções dos alunos, o professor promove uma discussão sobre seus funcionamentos e as transformações que realizam.

Na *Atividade de Construção,* após a construção coletiva de um dos instrumentos conduzida pelo professor, os alunos são convidados a construir, no *GeoGebra*, um dos outros instrumentos, seguindo um protocolo de construção. O momento de construção coletiva é necessário para que os alunos se familiarizem com a linguagem geométrica do protocolo; após este processo, além de terem o contato com a linguagem geométrica, eles podem manipular o instrumento construído e validar a construção. É após esta experiência coletiva que os alunos se engajam, agora com autonomia, na construção de um segundo instrumento.

Na *Atividade de Argumentação* o professor discute a transformação realizada por certo instrumento, e então avança na argumentação que explica porque, de fato, tal transformação acontece. A argumentação é baseada em propriedades geométricas que, normalmente, fazem parte do programa de geometria escolar. Assim, para desenvolver essa etapa, é preciso retomar, inicialmente, as propriedades básicas a serem utilizadas na argumentação. Após a apresentação do professor, os alunos são convidados a repensar sobre a argumentação por ele apresentada, e então escrevem, com suas próprias palavras, as suas explicações.

O objetivo na *Atividade de Argumentação* não é demonstrar uma lista de propriedades da geometria, mas sim fazer uso dessas propriedades para explicar a transformação feita pelo instrumento – o mais importante, na atividade, é o aluno entender como funcionam as argumentações dedutivas em geometria. Quanto à redação a ser realizada pelo aluno, o interesse não é na reprodução da demonstração usando as palavras do professor, mas sim, provocar no aluno uma articulação de ideias através de encadeamentos lógicos.

A sequência didática que organizamos é uma possibilidade para o trabalho com argumentação dedutiva na escola – ela inicia com a exploração empírica dos instrumentos, avança com a construção que provoca a análise das propriedades dos instrumentos e finaliza com uma explicação que se caracteriza como uma demonstração, sem que haja maiores preocupações com o formalismo da linguagem.

No que segue, analisamos diferentes momentos da produção dos alunos. A análise faz referências à teoria de Van Hiele. Segundo Van Hiele (apud Gravina, 2001) o desenvolvimento do pensamento em geometria está baseado em quatro níveis, a saber, nível zero (visualização), nível um (análise), nível dois (dedução informal), nível três (dedução formal) e nível quatro (rigor). Também é feita referência à teoria dos registros semióticos de Duval (2003). Segundo Duval, a aprendizagem em matemática se dá na mobilização de pelo menos dois registros, dentre eles: linguagem natural, figuras geométricas e escrita algébrica.

Na exploração do rotor, seguindo a sugestão dada no material, os alunos desenharam diferentes formas com a ponta vermelha e observaram o comportamento da ponta verde. A dupla A&B desenhou um quadrado, conforme ilustra a Figura 5.

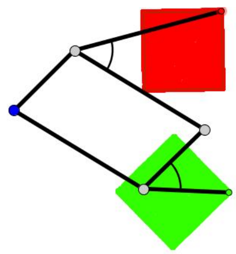

Figura 5: Atividade de exploração – dupla A&B
Fonte: Autor

Explicando a relação entre as figuras produzidas, a dupla escreve: *"No instrumento de desenho percebemos que os desenhos reproduzidos pelos pontos vermelho e verde são os mesmos, porém em posições diferentes, pois os ângulos que o fazem são os mesmos, porém em posições distintas"*. Não encontramos na escrita dos alunos a palavra rotação, porém podemos perceber certo entendimento da rotação quando falam sobre *mesmos ângulos* e *posições distintas*. Quando utilizam a expressão *mesmos ângulos*, interpretamos que queriam expressar que o ângulo determinado pela vareta que tem como extremidade o ponto vermelho e a vareta correspondente a lado do paralelogramo é igual ao ângulo determinado pela vareta que tem o ponto verde como extremidade e a vareta correspondente a outro lado do paralelogramo. Quando utilizam a expressão *posições distintas*, interpretamos que queriam expressar que o desenho verde está em uma posição diferente do desenho vermelho, e que esta posição diferente foi obtida através de uma rotação.

Na "atividade de construção", as duplas A&B e C&D conseguiram construir o pantógrafo e testar o instrumento (Figuras 6 e 7). A dupla A&B realizou um desenho vermelho, observando a ampliação com o desenho azul (Figura 6). A dupla C&D fez desenho com a ponta "azul" e observou a ponta "cinza" fazendo a figura ampliada, conforme mostra a Figura 7.

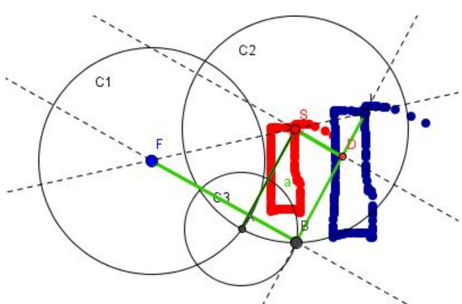

Figura 6: Atividade de construção – dupla A&B
Fonte: Autor

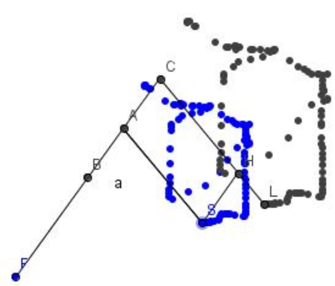

Figura 7: Atividade de construção – dupla C&D
Fonte: Autor

Na “Atividade de Construção”, as duplas trabalharam com a leitura e interpretação da linguagem geométrica, retomando conceitos de geometria referente a pontos, retas e circunferência. Além disso, aprenderam a utilizar os recursos básicos de construção do *GeoGebra*. A produção feita pelas duplas mostrou um trabalho no *nível um* de teoria de Van Hiele – o *nível da análise*, pois os alunos compreenderam, a partir da linguagem geométrica, o que deve ser construído e, ainda, como deve ser construído no software *GeoGebra*. Identificaram na construção as retas paralelas, as intersecções entre retas, os círculos a partir de centro e raio. Neste processo, os registros discursivo e geométrico da teoria de Duval se fizeram presentes – principalmente nas conversões do registro discursivo do protocolo de construção para o registro geométrico na forma de figuras na tela do computador. Segundo Duval (2003) é especialmente no trabalho com as conversões que os alunos desenvolvem habilidades que devem ser valorizadas no processo de aprendizagem da matemática, pois é através dos diferentes registros de representação que os alunos constroem o conhecimento matemático.

Diferentemente da “Atividade de Exploração”, na “Atividade de Construção” foi com maior facilidade, e entusiasmo, que os alunos realizaram a tarefa proposta. Tal comportamento está de acordo com a observação feita por Duval – a conversão do registro geométrico para o discursivo, geralmente, é mais difícil do que a conversão no sentido contrário. Na conversão do registro discursivo para o geométrico os alunos já possuem, de antemão, a explicitação dos elementos geométricos a serem considerados; já na conversão do registro geométrico para o discursivo, os alunos precisam tomar iniciativas quanto à escolha de uma adequada linguagem geométrica para comunicar as ideias e aqui as exigências cognitivas são, de fato, maiores.

Na “Atividade de Argumentação” o professor apresentou a argumentação do rotor e do pantógrafo, dizendo que depois de discutida a argumentação dos dois instrumentos os alunos deveriam refletir e escrever com suas próprias palavras a argumentação do pantógrafo. Os alunos receberam uma folha com o desenho de um pantógrafo, com atribuição de nomes aos pontos. Na produção do aluno A (Figura 8), vemos que, de forma empírica, foram atribuídas medidas para as “varetas” que compõem o pantógrafo e foi informado o fator de ampliação 1,5 dado pela razão 3/2. O aluno também indica a congruência de ângulos ao nomeá-los y e z .

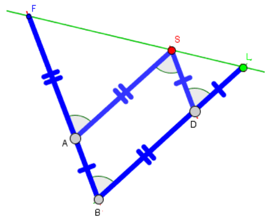

Figura 8: Pantógrafo
Fonte: Autor

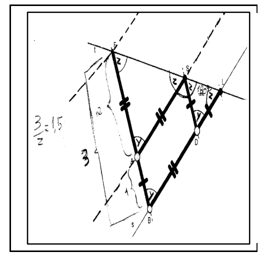

Figura 9: Produção do aluno
Fonte: Aluno A

Quanto à argumentação, ele inicia mencionando a proporção dada pelo teorema de Tales, usando a notação *FB, FA, FL e FS* que identifica os diferentes segmentos (Figura 9). Mas ele não chega a explicitar as retas paralelas e transversais que garantem a hipótese do teorema. O aluno considera a condição para o alinhamento dos pontos F, S e L, a saber $z+z+y=180º$, mas não chega a apresentar o argumento que explica a igualdade.

O texto do aluno iniciou com a descrição das duas propriedades do pantógrafo e finalizou com a descrição da transformação. O aluno A utilizou pensamento empírico ao indicar, no instrumento, as medidas dos segmentos e a correspondente razão de ampliação *1,5*; mas não fez o mesmo para os ângulos ao utilizar letras para expressar suas medidas, o que interpretamos como discernimento quanto à mudança de medida do ângulo, de acordo com o movimento do instrumento. O aluno usou tanto dados empíricos (medidas fixas das varetas) quando dados generalizadores (medidas variáveis dos ângulos tida pela movimentação do instrumento). Quanto aos diferentes registros: ele utilizou registro geométrico ao fazer desenho esquemático do pantógrafo, registro com a linguagem natural e com escrita simbólica para descrever as propriedades do instrumento. A produção do aluno A, mesmo não sendo do tipo “argumentação dedutiva”, mostra um bom entendimento da linha de raciocínio apresentada pelo professor ao fazer referência às duas propriedades do instrumento e, ao final, ao trazer a descrição da transformação; o texto mostra segurança na organização das ideias, em especial, quando faz uso de notação diferente daquela usada pelo professor no momento da apresentação da demonstração. Identificamos a produção do aluno A como a que melhor reflete o entendimento do funcionamento do pantógrafo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresentamos os resultados da dissertação de mestrado “Instrumentos Virtuais de Desenho e a Argumentação em Geometria”, a ser defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS. Nossa experiência nos levou a concluir que o trabalho com argumentação dedutiva deveria ser mais considerado na formação matemática escolar. Observamos que para iniciar um raciocínio dedutivo em geometria, o aluno precisa inicialmente visualizar na figura as propriedades que fazem parte das hipóteses e também visualizar as propriedades que são decorrentes destas hipóteses, então a serem demonstradas. O desenvolvimento de tais habilidades exige tempo.

Os alunos do primeiro ano do Ensino Médio, que participaram da experiência, mostraram dificuldades para organizar ideias e fazer um encadeamento de raciocínios lógicos que explicasse a transformação feita pelo pantógrafo. Mas isto não é desanimador, muito pelo contrário: considerando que viveram uma das poucas experiências com argumentação dedutiva, o progresso destes alunos foi francamente positivo.

O ensino da geometria, sob o enfoque dedutivo, propicia o desenvolvimento de habilidades para elaborar argumentos lógicos; esta é mais uma razão para que seja valorizado na escola. Tal trabalho de reflexão e organização de ideias precisaria ser iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental, com mais ênfase e regularidade. Desta forma os alunos ingressariam no Ensino Médio já com habilidades para entender e apreciar, sem maiores dificuldades, as argumentações dedutivas que fazem parte do saber matemático.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, C.B.; MERZBACH, U.C. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012. Tradução de Helena Castro da 3ª edição americana.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (5ª a 8ª séries). Brasília: Ministério da Educação, 1998.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). Campinas, SP: Papirus, 2003.

EDUMATEC. Coordenação de Maria Alice Gravina. Desenvolvido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2000. Apresenta materiais que trata do potencial da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acessado em: 10 janeiro de 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª edição. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Tradução de Hygino H. Domingues.

FETISSOV, A.I. **A demonstração em geometria**. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando. São Paulo: Atual, 1994.

GRAVINA, M. A.. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, 2001.

Museo Universitário di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica. Universidade Universitá Degli Studi di Modena e Reggio Emilia. Disponível em: http://www.museo.unimo.it/theatrum/inizio.htm. Acesso 14/02/2012.

The MacTutor History of Mathematics archive. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kempe.html . Acessado em: 16 de fevereiro de 2012.