

Um Estudo com Professores do Ensino Médio sobre Função Modular por Meio de Resolução de Problemas Utilizando o *Software* GeoGebra como Estratégia Pedagógica

Helena Tavares de Souza¹

Barbara Lutaif Bianchini²

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: O presente artigo é parte de uma pesquisa em andamento com abordagem qualitativa, realizada com estudantes do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma Universidade do Estado de São Paulo e que também são professores do Ensino Médio em escolas da rede pública e privada de São Paulo. A investigação tem por objetivo analisar como este professor diferencia exercícios e problemas matemáticos e também, se as representações algébricas e gráficas de função modular, contemplam a metodologia sugerida por Polya para a resolução de problema matemático. Os instrumentos aplicados foram um questionário semi-estruturado dividido em quatro partes e uma entrevista não-estruturada. A Resolução de Problemas é uma metodologia importante, segundo alguns autores, para o processo de ensino e aprendizagem na Matemática, sendo Polya um dos autores a destacar um roteiro para o ensino da matemática por meio desta metodologia. A pesquisa não tem como foco principal analisar a representação algébrica e gráfica de função modular com o uso das tecnologias, mas propõe a utilização do *software* GeoGebra como estratégia pedagógica para tal ensino do tema em questão. Os resultados apontam que os sujeitos participantes da investigação diferenciam exercícios e problemas matemáticos.

Palavras-chave: Educação Algébrica. Resolução de Problemas. Função Modular. GeoGebra.

1. Introdução

O objetivo deste artigo é descrever os caminhos e resultados de uma pesquisa em andamento com abordagem qualitativa que pretende analisar como professores do Ensino Médio que também são alunos de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma Universidade do Estado de São Paulo diferenciam exercícios e problemas matemáticos e também se as representações algébricas e gráficas de função modular, expressas por estes, contemplam a metodologia sugerida por Polya para a resolução de problema matemático.

¹ Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP.

² Profª Drª do Programa de Estudo da Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (1998, p.112) “resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios”.

Pais (2008) corrobora com essa ideia ao afirmar que o trabalho com resolução de problemas amplia os valores educativos do saber matemático e do desenvolvimento dessa competência e contribui na capacitação do aluno para melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Conforme pesquisa realizada no site da Capes³, no primeiro semestre de 2012, observamos que a produção acadêmica em Educação Matemática no Brasil, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem de valor absoluto, função modular e inequação modular, apresenta poucos trabalhos específicos sobre o tema, isto nos despertou um maior interesse para tal investigação. Assim, destacamos Júnior (2008) que teve por objetivo em sua pesquisa a elaboração de uma sequência didática envolvendo atividades para o ensino de valor absoluto e função modular numa abordagem curricular em rede.

Para uma melhor visualização e compreensão dos gráficos referentes à função investigada, utilizamos o *software* GeoGebra⁴ como interface mediadora para a representação gráfica de função modular. Vale à pena ressaltar que os *softwares* por mais que sejam considerados os elementos essenciais para o funcionamento de tecnologias digitais, não são os elementos mais relevantes, visto que os programas em si, não são elementos didáticos. O foco da pesquisa não são as tecnologias, mas os conteúdos e as pessoas que aprendem, servindo às tecnologias como interfaces mediadoras entre, por exemplo, situações-problema e o conhecimento que se pretende consolidar.

A pesquisa aqui relatada valeu-se de suportes teóricos a seguir.

³ www.capes.gov.br

⁴ Criado em 2001 por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, na Áustria. O *software* GeoGebra é gratuito e vêm ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdo de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo professores e alunos à possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático. www.pucsp.br/geogebra

2. Referencial Teórico

George Polya, em 1944, em a sua obra *A Arte de Resolver Problemas* trata da relação de “como pensar” para a resolução de problemas por meio do raciocínio heurístico, que tem por objetivo estudar os métodos e regras da descoberta e da invenção, na qual grandes matemáticos e filósofos, como Pappus, Descartes, Leibnitz, Bolzano e outros, pesquisaram sobre tais indagações heurísticas (POLYA, 2006, p.99).

As quatro etapas para se ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas indicado por Polya (2006) são:

Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver os diversos itens inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 2006, p.4-5).

O autor ressalta que o problema a ser resolvido deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, deve ser natural e interessante, é necessário que o problema seja compreendido. O autor comenta que “é uma tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida e muito triste trabalhar para um fim que não se deseja” (p.5).

Vários autores citam a palavra “problemas”, mas será que problemas é apenas algo que necessita ser resolvido, superado e que exige um pensar consciente para solucioná-lo? Para Onuchic (1999, p.215) problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. Brousseau (2008, p.19-35) afirma que problema “é um dispositivo, um meio que responde ao sujeito, segundo algumas regras” e argumenta que o problema matemático faz o sujeito agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim, novos conhecimentos a partir das atividades propostas.

Também comentam as autoras Onuchic e Allevato (2004, p.213) que problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo escolar desde a Antiguidade e hoje é ainda muito mais significativo. A necessidade de se “entender” e “ser capaz” de usar Matemática na vida diária e nos locais de trabalho nunca foi tão grande.

Encontramos também nos PCN que “problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou

seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la” (BRASIL, 1998, p.82).

Nossa pesquisa não tem como foco principal analisar a resolução da função modular com o uso das tecnologias, mas sim utilizamos o *software* GeoGebra como estratégia pedagógica para o ensino do tema função modular. É importante ressaltar conforme comenta Oliveira (2007, p.35) que os computadores não substituem os seres humanos ou simplesmente os complementam, mas auxiliam na reorganização do pensamento com outras formas de proceder à formulação e a resolução de problemas. O autor em outro texto relata que a “efetividade didática do *software* didático depende de estratégia, planejamento, crítica, debate e significação. Não há *software* didático por si, assim como não há tecnologias que educam” Oliveira (2009, p.3).

Com base nos referenciais teóricos mencionados, descrevemos a investigação a seguir.

3. Métodos utilizados na investigação

A pesquisa realizada tem uma abordagem qualitativa, de acordo com as ideias de Appolinário (2009, p.155), “os dados são coletados através de interações sociais e analisados subjetivamente pelo pesquisador”.

Acreditamos que a pesquisa qualitativa é a mais indicada para atingir os nossos objetivos, pois não nos interessa apontar a quantidade de erros ou acertos dos professores ao resolverem um problema, mas quais foram as condições propiciadas a estes sujeitos de pesquisa (os professores), permitindo-os desenvolver um raciocínio para chegar à solução e se a abordagem utilizada, no ensino de função modular, propicia, ou não, um entendimento sobre o assunto, quais foram as dificuldades encontradas e os avanços percebidos.

Os sujeitos voluntários para a pesquisa são professores do Ensino Médio de escolas da rede pública e privada do Estado de São Paulo e também alunos do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma universidade de São Paulo. O critério para a escolha de professores que também são estudantes da Pós-Graduação é que “supostamente” estes estão mais próximos do “saber matemático”.

Os instrumentos aplicados a tais sujeitos são constituídos por: entrevista não-estruturada e questionário semi-estruturado dividido em quatro partes: a primeira aborda

por categorias perguntas que com os seguintes assuntos: o tempo de profissão dos sujeitos, as séries que lecionam, a escola que lecionam (pública ou privada) e sua localização, as disciplinas lecionadas. A segunda parte da atividade contém duas questões: 1) justificar se há diferença entre exercício e problema matemático. 2) dadas as funções $f(x)=|x|$ e $f(x)=|x+a|$ representar algebricamente cada uma delas, detalhadamente, explicando passo a passo, para que seja possível a comparação das respostas dos sujeitos com as quatro fases da resolução de um problema sugeridas por Polya. E também classificar as questões envolvendo função modular em exercício ou problema matemático.

A terceira parte da atividade foi utilizado o *software* GeoGebra para a representação gráfica das funções modulares. E a quarta parte do questionário os sujeitos responderam quais as contribuições do *software* GeoGebra para o ensino de função modular e também para o docente e o processo didático.

A aplicação dos instrumentos da investigação com os sujeitos da pesquisa foi desenvolvida no mês de julho de 2012, devido estarmos no período de férias e estarem menos acúmulo de tarefas os respectivos professores. Utilizamos por quase 4 horas o espaço físico da biblioteca da universidade em que os sujeitos estudam para responderem todo o questionário. Após este momento fizemos uma breve leitura das respectivas respostas e por meio de entrevista gravada em um aparelho MP4 completamos algumas escritas de cada sujeito que entendemos estar superficiais.

Antes do dia marcado para a aplicação dos instrumentos, conversamos e explicamos individualmente a cada sujeito voluntário o objetivo da nossa pesquisa e pedimos que levassem no dia do encontro o seu respectivo *notebook*. Todos os professores nesta conversa informal disseram que tinham instalado em seus computadores o *software* GeoGebra, isto fez com que não precisássemos utilizar o laboratório de informática da Universidade.

Tendo como objetivo de análise os protocolos recolhidos, as gravações e as observações feitas durante as aplicações, segue a descrição das resoluções feitas pelos professores durante a experimentação. Adotamos como critério que os sujeitos investigados seriam citados como professores e não como alunos do curso em Educação Matemática. Portanto, professor A, B e C. Lembrando que nossa pesquisa está em andamento.

4. Análise e discussão dos resultados

O objetivo da pesquisa é responder as seguintes questões:

- Existe diferença entre exercícios e problemas matemáticos para o professor do Ensino Médio? Qual a justificativa que esse apresenta?
- O professor expressa a representação algébrica e gráfica da função modular de forma compatível com as quatro etapas sugeridas por Polya?

Propomos o quadro a seguir com os dados coletados, selecionados e organizados de três sujeitos participantes da investigação, propondo inferências e interpretações de acordo com os objetivos da pesquisa, o referencial e os aportes teóricos.

Informações	Professor A	Professor B	Professor C
Perfil Profissional	Mais de 20 anos na docência. Licenciatura Plena em Matemática (1995), Licenciatura em Pedagogia (2000) e mestrando em Educação Matemática (2012). Leciona Matemática ao 1º e 2º ano do Ensino Médio na escola da rede pública no Grande ABC em São Paulo.	Entre 15 a 20 anos na docência. Licenciatura Plena em Matemática (1994), Ensino e Aprendizagem da Matemática – <i>Latu Sensu</i> (2004) e mestrando em Educação Matemática (2012). Leciona Matemática e Física ao 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio na escola da rede pública e privada de São Paulo.	Menos de 15 anos na docência. Licenciatura Plena em Matemática (1997), Especialização em Didática da Matemática (2005) e mestrando em Educação Matemática (2012). Leciona Matemática ao Ensino Fundamental II e 1º ano do Ensino Médio na escola da rede pública no Grande ABCDM em São Paulo.
Diferença entre exercício e problema matemático	Sim. Exercício matemático é algo prático, rápido, resolução imediata e segue-se um modelo, já um problema matemático precisa pensar mais para responder, ter mais argumentações, ter pré-requisitos, a resposta não é imediata.	Sim. Exercício matemático é somente aplicação de algum conteúdo visto. Não apresenta desafio para o aluno. Problema matemático é uma situação desafiadora. O aluno dependerá de algumas relações anteriores e seu conhecimento de mundo para determinar a solução.	Sim. O exercício é apenas prática do que se aprende e o problema exige pensamento e provas de conjecturas e até demonstrações.
F(x)= x 	Exercício matemático	Exercício matemático	Exercício matemático
F(x)= x+a 	Exercício matemático	Problema matemático	Exercício matemático
F(x)= x +a	Exercício matemático	Problema matemático	Exercício matemático
Representação algébrica das funções modulares	$f(x)= x $ $f(x)= x$ se $x \geq 0$ ou $f(x)= -x$ se $x < 0$. $D=\mathbb{R}$ e $\text{Im}=\mathbb{R}_+$. $f(x)= x+a $ para $x+a$, se $x+a \geq 0$ então $x \geq -a$ ou $-x+a < 0$	Para $f(x)= x $ devemos ter em mente a definição de módulo da variável x : se o valor de x for maior ou igual a zero, o módulo de x será x . Se o valor de x for menor que zero, seu módulo será $-x$ ficando $-(-x) = x$.	$f(x)= x $: $y= x $ então $y= -x$ assim $-y=x$ ou $x=y$. $f(x)= x+a $: $y= x+a $ então $y=-(x+a)$ então $y= -x-a$ então $y+a= -x$ assim $x= -y-a$ ou também

expressas pelos sujeitos da investigação	então $x < -a$. $f(x) = x + a$ para $x + a$, se $x \geq 0$ ou $-x + a$, se $x < 0$.	Para $f(x) = x + a $: qualquer valor da variável x maior ou igual a $-a$ (positivo) temos que $x + a$ será maior ou igual a zero e teremos $ x + a = x + a$. Se x menor que a raiz $-a$ (negativo), teremos $x + a$ menor que zero, então $ x + a $ será igual a $-(x + a) = -x - a$. Para $f(x) = x + a$ Se $x \geq 0$, teremos que módulo de x é igual ao próprio x . Teremos $f(x) = x + a = x + a$. Se $x < 0$, teremos que módulo de x é igual a menos x e teremos $f(x) = x + a = -x + a$ que será igual a $-(-x) + a$ que será igual a $x + a$.	$y = x + a$ então $y - a = x$ assim $x = y - a$. $f(x) = x + a$: $y = -x + a$ então $y - a = -x$ assim $a - y = x$ ou também $y = x + a$ assim $x = y - a$
Contribuições do software GeoGebra ao professor e o processo didático	Penso que o <i>software</i> GeoGebra ajuda o professor no processo didático quanto a visualização dos gráficos, devido o software oferecer movimento nas funções após a construção.	O <i>software</i> GeoGebra quando inserido na prática e no contexto pedagógico do professor é um recurso eficiente e se bem conduzido pode provocar no aluno uma posição de reflexão, crítica, não somente um expectador mas a construção de sua própria aprendizagem.	O docente que possui o domínio da ferramenta pode utilizá-la constantemente para fazer demonstração de seus ensinamentos. Destacamos a importância da construção com régua e do uso da prática algébrica manual no fortalecimento do conhecimento.

Analizamos que os três sujeitos têm clareza sobre a diferença entre exercício e problema matemático, suas respostas condiz com a ideia de Onuchic (1999, p.215) ao afirmar que problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. Descreve o professor A que para resolver um problema é preciso *pensar mais, ter mais argumentações*, descreve o professor B que *problema matemático é uma situação desafiadora* e o professor C descreve que *problema exige pensamento e provas de conjectura e até desmonstração*. Todas as descrições dos três professores afirmam que problemas matemáticos são aqueles que estão interessados na busca de respostas, “interessado em resolver” o problema segundo afirma a autora. Conforme os relatos nos PCN do Ensino Fundamental “a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la” (BRASIL, 1998, p.82).

Ao classificar as questões que envolvem as funções $f(x) = |x|$; $f(x) = |x + a|$ e $f(x) = |x| + a$ como exercícios matemáticos, podemos inferir que os professores A e C têm compreensões do conteúdo em questão e conhecem todos os passos necessários para uma resposta

imediate, talvez por isso não classificaram por problema matemático. Mais isso não significa que para estes tais funções modulares não são necessárias argumentações para as diferentes representações.

Já o professor B entende que apenas a função modular $f(x)=|x|$ é classificada como exercício matemático, conforme ele mesmo explica no item anterior, “é somente aplicação de algum conteúdo visto”, neste caso, o conteúdo de módulo. As funções $f(x)=|x+a|$ e $f(x)=|x|+a$ são problemas matemáticos, uma “situação desafiadora”, segundo o próprio sujeito B. Ele descreve anteriormente que para a resolução de um problema matemático o aluno depende de algumas relações anteriores, talvez devido na segunda e terceira função modular ter a expressão “ a unidades” o professor entenda ser preciso outras argumentações para tais representações, como por exemplo, deslocamento da unidade a na vertical ou na horizontal referente a função $f(x)=|x|$.

Por entendermos que as questões que envolvem funções modulares na investigação são classificadas por exercícios matemáticos, esperávamos que tais sujeitos da pesquisa também as classificassem por exercícios matemáticos, mas conforme descrito anteriormente, para o sujeito B, são problemas matemáticos as funções $f(x)=|x+a|$ e $f(x)=|x|+a$. Este resultado confirma a ideia de Dante (2010, p.11): “o que é um problema para alguns pode não ser para outros e o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro”.

Sobre as representações algébricas das funções modulares expressas pelos sujeitos, analisamos que as descrições dos professores A e B são compatíveis com a metodologia sugerida por Polya, pois, tem familiarização com os conceitos dessas funções, entendendo qual o objetivo final, compreendem a questão percebendo claramente o que é necessário, inter-relacionam a incógnita que está ligada aos dados e estabelecem uma representação utilizando o conceito de módulo.

O professor C entendemos que em sua descrição não há compatibilidade com a metodologia de Resolução de Problemas segundo Polya. Existe compreensão do conteúdo em questão, porém não há inter-relações da incógnita aos dados, há sim, uma aplicação da “técnica mecânica” dos conceitos matemáticos relativos à função modular.

Lembramos que a utilização de tecnologias com o *software* GeoGebra não é o foco principal da pesquisa, mas sim uma estratégia pedagógica.

Desta forma, analisamos que os sujeitos da pesquisa não tiveram dificuldades na utilização do *software* GeoGebra. Justificam as relações entre as representações gráficas das funções modulares e percebem que a tecnologia é uma estratégia pedagógica para uma melhor compreensão do tema, conforme a ideia de Oliveira (2009, p.3) ao relatar que a “efetividade didática do *software* didático depende de estratégia, planejamento, crítica, debate e significação. Não há *software* didático por si, assim como não há tecnologias que educam”.

5. Considerações Finais

A realização desta pesquisa de abordagem qualitativa forneceu elementos para melhor embasar as ações dos docentes investigados. Utilizando a metodologia de Resolução de Problemas no tema função modular foi possível analisar com mais detalhes o seu desenvolvimento. O resultado da análise dos professores do Ensino Médio investigados vêm ao encontro do comentado pelos PCN (1998, p.112) ao afirmar que “ a resolução de problemas é a peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o individuo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios”.

O objetivo principal da pesquisa não foi o uso das tecnologias, mas com os resultados obtidos na investigação, aponta-se que o uso das TICs não é o único meio que os professores podem trabalhar o ensino e aprendizagem das funções modulares ou de qualquer outro conteúdo abordado na Matemática. Tal fato traz uma abordagem como estratégia pedagógica ao trabalho destes professores e a construção do conhecimento, a tecnologia em si não modifica o saber e o ensinar. Destacamos esta ideia na descrição do professor C: “a importância da construção com régua e do uso da prática algébrica manual no fortalecimento do conhecimento”.

Referências

APPOLINÁRIO, Fabio. **Dicionário de Metodologia Científica: um guia para a produção do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2009.

BRASIL. MEC/ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, Luis Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. São Paulo: Ática, 2010.

JÚNIOR, Dárcio Costa Nogueira. **Elaboração de uma sequência didática para a aprendizagem de valor absoluto e da função modular utilizando a organização curricular em rede**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte: PUCMG, 2008.

OLIVEIRA, Gerson Pastre. **Colaboração e multidimensionalidade como elementos para a avaliação da aprendizagem em curso on-line**. Revista de Ciências Exatas e Tecnologia, v. II, p.30-45, 2007.

_____. **Estratégias didáticas em educação matemática: as tecnologias de informação e comunicação como mediadoras**. Anais do IV Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – IV Sipem. Brasília: SBEM, 2009 a. CD-ROM.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: UNESP, p.199-220, 1999.

_____; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org). Educação Matemática pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p. 213-231, 2004.

PAIS, Luis Carlos. **Transposição Didática**. In: Sílvia Dias Alcântara Machado (org). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.