Teoremas-em-Ação Elaborados por Alunos do 2º Ano do Ensino Médio sobre Ângulos

Leonor Wierzynski Pedroso Silveira[1]

GD3 – Educação Matemática no Ensino Médio

RESUMO

Este artigo é fruto da dissertação: Uma Proposta de Ensino da Trigonometria com o Uso do *Software* GeoGebra (2012). Pretende-se com ele destacar a importância do conceito de ângulo, relatar as diferentes definições de ângulo encontradas nos livros de Geometria e nos livros didáticos pesquisados e apresentar alguns dos diferentes teoremas-em-ação observados durante a experiência de ensino e que estavam relacionados com as noções de ângulo. O conceito de ângulo mostrou-se de grande importância no estudo da Trigonometria. Acreditava-se que esse conceito, no 2º ano do Ensino Médio, já deveria estar bem compreendido, porém, no decorrer da experiência de ensino, observou-se que as novas situações de aprendizagem com uso do programa trouxeram à tona falsos teoremas-em-ação construídos pelos alunos. Com isso, tornou-se necessário um aprofundamento das discussões em aula sobre esse conceito e, consequentemente, ampliou-se a pesquisa nesse sentido. A necessidade de aprofundamento no estudo do conceito de ângulo mostrou que a construção de um conceito não acontece em um único momento e com uma única situação de aprendizagem, mas vai acontecendo ao longo de toda a vida escolar do aluno e vai sendo enriquecida por diferentes situações de aprendizagem promovidas pelo professor.

Palavras-chave: Ângulo. Teorema-em-Ação. GeoGebra. Vergnaud.

INTRODUÇÃO

No início do ano de 2012, apresentei minha dissertação de mestrado intitulada: Uma Proposta de Ensino da Trigonometria com o Uso do *Software* GeoGebra. Este trabalho apresentou uma proposta de ensino da Trigonometria para estudantes do Ensino Médio, baseada na utilização do *software* GeoGebra. Seu principal objetivo foi avaliar a aprendizagem da Trigonometria propiciada por uma sequência de ensino desenvolvida em um ambiente informatizado e dinâmico. A metodologia utilizada na pesquisa foi o estudo de caso. As atividades da experiência didática foram aplicadas em uma escola particular de Porto Alegre em duas etapas: inicialmente, com uma turma de 45 alunos e, posteriormente,

[1] Mestre em Ensino de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - PPGEM/ UFRGS. Contato: leonorwp@yahoo.com.br

com um grupo de 7 alunos dessa turma. A análise dos dados coletados foi baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud e enfocou a identificação e interpretação de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados pelos alunos nas resoluções das atividades. A aprendizagem dos conceitos de ângulo, razões trigonométricas, círculo trigonométrico e funções trigonométricas e propriedades a eles relacionadas foi favorecida pelo uso do *software* de Geometria Dinâmica, que propiciou a observação e compreensão de relações entre elementos de uma construção, permitiu a experimentação de hipóteses e elaboração de conclusões, instigou discussões e tornou as aulas mais dinâmicas, com o professor assumindo o papel de mediador na aprendizagem, e o trabalho cooperativo entre os alunos organizados em grupos.

Os objetivos deste artigo são: destacar a importância do conceito de ângulo que, durante o processo de análise do material coletado na pesquisa, mostrou-se como uma das noções fundamentais para a compreensão da Trigonometria; relatar as diferentes definições de ângulo encontradas nos livros de Geometria e nos livros didáticos pesquisados e apresentar alguns dos diferentes teoremas-em-ação observados durante a pesquisa e que estavam relacionados com as noções de ângulo.

DIFERENTES DEFINIÇÕES DE ÂNGULO

A partir da observação das diferentes respostas dadas pelos alunos às atividades da experiência didática que envolviam noções de ângulo e às confusões que foram evidenciadas durante esse processo, busquei alguns livros de Geometria e alguns livros didáticos para observar como definiam ângulo. Pude notar que as definições que apareceram envolviam, basicamente, quatro elementos: definição de ângulo como uma inclinação, definição de ângulo a partir de semirretas, definição de ângulo a partir de região do plano e definição de ângulo a partir de um giro. Abaixo, apresento algumas das definições encontradas.

Em "Os Elementos", de Euclides (2009, p. 97), encontrei uma definição que envolve a ideia de inclinação: “E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta”.

A definição de ângulo mais encontrada nos livros de Geometria é a que envolve a ideia de semirretas com mesma origem:

> Se duas semirretas tiverem a mesma origem mas não estiverem contidas na mesma reta, então sua reunião é um ângulo. As duas semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum das semirretas é chamada vértice do ângulo (MOISE; DOWNS, 1971, p. 67).

> Ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas são os lados do ângulo e a origem comum é seu vértice (CARMO, MORGADO e WAGNER, 2005, p. 5).

Essa definição também aparece em livros didáticos, como:

> Ângulo é uma figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas chamam-se lados do ângulo e o ponto de origem chama-se vértice (DANTE, 2009, p. 210).

São exemplos de definições de ângulo que utilizam a noção de região do plano:

> Uma região do plano, convexa, determinada por duas semirretas de mesma origem, é denominada ângulo (GIOVANNI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR, 2007, p. 148).

> Ângulo é a região do plano formada por duas semirretas distintas e de mesma origem (OLIVEIRA e FERNANDES, 2008, p. 80).

A definição de ângulo como um giro foi encontrada em apenas um livro didático. Imenes e Lellis (2003) iniciam o capítulo "Formas Planas", no livro didático para 5ª série, com o tópico: "Giros, cantos e ângulos". O tópico desenvolve noções de ângulo mostrando a imagem de uma régua escolar com uma extremidade fixa e a outra livre. As imagens mostram giros dessa régua e explica-se : "O giro da régua corresponde a um ângulo" (Idem, p. 59).

Outras informações são adicionadas como, por exemplo, "Para medir ângulos, consideramos que a volta toda tem 360°" e "O ângulo de meia volta também é chamado ângulo raso. Ele mede 180° porque 180° é a metade de 360°". O tópico se encerra com a figura de um ângulo (dois segmentos de reta com mesma origem, o ponto A) e a identificação de seus elementos: o vértice A, os lados e o ângulo Â (a região interna entre os dois segmentos).

Contudo, a noção de ângulo como um giro ou uma rotação, isto é, ângulo compreendido como uma figura dinâmica também está presente em alguns textos pesquisados. Moise e Downs (1971) definem ângulo utilizando a ideia de semirretas de mesma origem, porém mais adiante, no mesmo capítulo, explicam que

> Essa é a forma mais simples da ideia de um ângulo. [...] Mais tarde, no entanto, quando você estudar trigonometria, a ideia de ângulo aparecerá de uma forma diferente. Em trigonometria, fará diferença qual lado do ângulo é mencionado em primeiro lugar. Isto é, em trigonometria fazemos distinção entre CÂB e BÂC. Em CÂB, o lado AC é o lado inicial e AB é o lado final. [...] Ângulos assim são chamados ângulos orientados (Ibidem, p. 72).

A expressão "ângulo orientado", citada no texto, remete à ideia de movimento, ou seja, esse ângulo orientado será construído através de uma rotação de sentido horário ou anti-horário.

Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), no tópico "Um giro pode ser medido" (Ibidem, p. 148), apresentam figuras de um palito fixo em uma extremidade e livre na outra. As figuras mostram esse palito em movimento e afirma-se: "Um giro nos dá uma ideia de ângulo"; somente depois dessa abordagem inicial é que os autores definiram ângulo a partir da ideia de região do plano.

Iezzi (1999) não trata, explicitamente, da ideia de ângulo como um giro ou uma volta. Sua definição geométrica de ângulo é fixa (definiu ângulo a partir de duas semirretas de mesma origem). Contudo, quando o autor passa a tratar de funções circulares, a palavra "percurso" é utilizada para indicar a marcação de arcos com comprimentos reais e remete a um movimento, um giro, no sentido anti-horário ou horário, e é utilizada com esse significado. O autor deixa claro também que um arco está associado a um ângulo central, logo, o texto sugere que, se um arco pode ser marcado no círculo a partir de um giro, então o ângulo determinado por esse arco também pode ser compreendido a partir desse giro.

No seu livro didático para o Ensino Médio, Dante (2009) inicia o capítulo "Conceitos trigonométricos básicos" definindo arco e ângulo central da seguinte maneira:

> Arco geométrico: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Se os dois pontos coincidem, teremos arco nulo ou arco de uma volta. Arco e ângulo central: todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subentende (DANTE, 2009, p. 278 - p. 279).

As imagens que são apresentadas ao leitor exemplificam ângulos e arcos de círculo e são seguidas de legendas como: "arco AB de 90° (um quarto de volta)" e "arco AB de 180° (meia volta)" (Ibidem, p. 279).

Mais adiante, o autor define arcos côngruos:

> Toda vez que o ponto da circunferência, final do arco iniciado em (1, 0), é o mesmo para dois arcos diferentes [...], chamamos esses arcos de arcos côngruos ou congruentes. É conveniente notar que todos os arcos côngruos diferem entre si de um múltiplo de 2π, que é o comprimento de cada volta (Idem, p. 281).

A maneira como o autor define e explica o conceito de arco sugere o tratamento como um giro, uma rotação, pois usa, constantemente, a expressão "volta". Esse tratamento de ângulo como giro também fica evidente ao analisar-se o livro para a 5ª série do Ensino Fundamental de autoria de Dante (2003). Ele define ângulo a partir de semirretas de mesma origem, mas explica a ideia de ângulo utilizando contextos de giro. No tópico intitulado: "Giros e ângulos" (Ibidem, p. 173), apresenta figuras de pistas circulares com carrinhos andando por elas e explica: "[...] para cada giro há um ângulo correspondente" (Ibidem, p. 173).

Uma discussão sobre as diferentes definições de ângulo foi realizada por Gadotti (2008). O quadro 1 resume as definições de ângulo encontradas por ela nos períodos: após o Movimento da Matemática Moderna (MMM), durante e antes do MMM.

Quadro 1

Resumo das definições por período referente à Matemática Moderna no Brasil por categoria.

Categorias	Após	Durante	Antes	Total
Par de linhas	17	4	2	23
Região no espaço	16	6	1	23
Como giro	4	-	-	4
Não define/outros	3	1	-	4
Total geral	40	11	3	54

Fonte: Gadotti (2008, p. 85)

O quadro 1 mostra que, dos 40 livros de matemática pesquisados no período após o MMM, 17 definiram ângulo como par de linhas, 16 como região no espaço e apenas 4 como giro. Os livros analisados no período do movimento e antes dele, não definem ângulo como giro. A autora analisou esses dados e comentou que:

> Ângulo como giro permite considerar ângulos maiores que 360º, ângulos positivos e negativos, mas, segundo Casas e Luengo (2005, p. 203), é uma ideia abstrata, pois não há algo material para representá-la como um par de linhas ou uma região no espaço. Além disso, essa definição de ângulo proporciona uma visão dinâmica, como algo em movimento, em contraste com as outras duas que dão uma visão estática (GADOTTI, 2008, p. 86).

Essa discussão sobre ângulo teve como objetivo esclarecer as noções de ângulo que a sequência de ensino pretendeu abordar com os alunos: ângulo formado por duas semirretas de mesma origem e ângulo como um giro.

A noção de ângulo como giro esteve presente nas atividades que envolveram o círculo trigonométrico. Na experiência de ensino, o círculo trigonométrico foi construído centrado sobre a origem de um sistema cartesiano ortogonal. A origem do sistema era o ponto O = (0, 0) e o raio media uma unidade de comprimento. O ângulo no círculo trigonométrico foi considerado como sendo formado por um segmento fixo OA (raio do círculo), em que A era o ponto de coordenadas (1, 0), e pelo segmento OP , sendo P um ponto qualquer pertencente ao círculo. Pretendeu-se desenvolver a noção de ângulo como um giro do lado OP , em torno de O, no sentido horário ou anti-horário. Esse tratamento dinâmico para ângulo foi favorecido pelas possibilidades de construção de figuras em movimento proporcionadas pelo *software* GeoGebra.

OS TEOREMAS-EM-AÇÃO OBSERVADOS

Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, um conceito não é apenas uma definição ou um enunciado. Um conceito é:

> [...] uma terna de três conjuntos distintos (não independentes entre eles evidentemente): C = (S, I, L)
> S conjunto de situações que dão sentido ao conceito
> I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações
> L conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráficas...) que permitem representar os conceitos e suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que eles evocam (VERGNAUD, 2009, p. 29).

Os invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) constituem os conhecimentos existentes ou gerados no esquema[2], isto é, "dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas" (ibidem). Os invariantes operatórios são fundamentais no desenvolvimento do campo conceitual por justamente constituírem os conhecimentos-em-ação envolvidos nos esquemas. Vergnaud define e distingue os invariantes operatórios conceito-em-ação e teorema-em-ação: "Um conceito-em-ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação. Um teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação" (2009, p. 23).

O foco na análise do material coletado na experiência foi a identificação dos conceitos-em-ação e teoremas-em-ação utilizados e criados pelos alunos. Abaixo, destaco e analiso apenas os teoremas-em-ação que se referiram ao conceito de ângulo e suas

---

[2] Segundo Vergnaud (2009, p.21), esquema é uma organização invariante da atividade para uma situação dada. Envolve: objetivo, antecipações, regras-em-ação de tomada de decisões e controle, invariantes operatórios e possibilidades de inferência em situação.

propriedades.

Teorema-em-ação 1: A soma dos ângulos internos de um triângulo é dada pela soma dos ângulos que aparecem na figura. (Falso).

Nessa atividade, os alunos viam uma construção na tela (figura 1) e tinham que responder qual era a soma dos ângulos internos de um triângulo, caso não soubessem, era esperado que obtivessem a medida do ângulo γ e somassem as medidas dos três ângulos. O falso teorema-em-ação foi identificado a partir da fala de um aluno: "Eu pensei que era somar o 30º com o 90º, mas não era". Aqui o aluno percebeu o erro ao comparar sua resposta com a resposta de outro grupo e pediu ajuda à professora. Observei que ele ficou focado na imagem da tela, ou seja, pensou que era só para somar as medidas dos ângulos que apareciam, desconsiderando o terceiro. Conversei com ele e seu grupo, mostrei o ângulo γ que estava indicado na imagem e expliquei que eles poderiam obter a sua medida e depois encontrar a soma total.

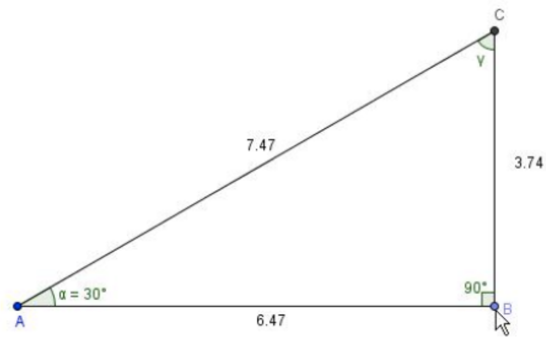

Figura 1: Triângulo retângulo.

Teorema-em-ação 2: Se os ângulos são diferentes, então as alturas [cateto oposto] também serão diferentes. (Falso).

Este teorema-em-ação falso foi elaborado por um grupo de alunos que resolviam a atividade que pedia para calcularem a altura de um prédio (figura 2).

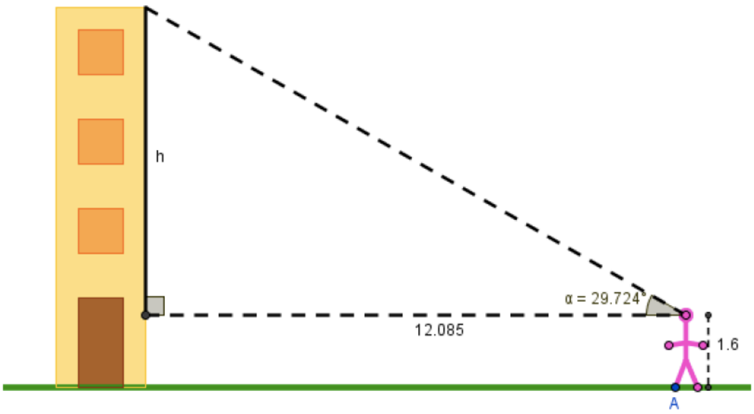

Figura 2: Prédio com altura h + 1,6.

Os alunos tinham que obter a medida h utilizando a tangente do ângulo α. Cada grupo iria trabalhar com valores diferentes, pois o ponto A (correspondente ao pé da pessoa na figura) era móvel e movendo o ponto A, as medidas do ângulo e da distância da pessoa ao prédio mudavam, porém, a altura do prédio ficava sempre a mesma. Após obter a altura total do prédio (h + 1,6), os alunos deveriam comparar suas respostas com as respostas dos grupos próximos. Ao encontrar valores próximos, ou seja, com uma pequena diferença nas casas decimais, um grupo concluiu que essa diferença ocorria por causa dos ângulos com medidas diferentes e não por arredondamentos nos cálculos (que era a resposta esperada). A partir desse falso teorema-em-ação discuti com os alunos o contexto do problema, fazendo eles pensarem que a altura de um prédio não muda quando observado de pontos diferentes, ou seja, é uma constante. Também conversei com eles no sentido de esclarecer a questão dos arredondamentos que o programa faz, pois pode-se utilizar uma, duas, três casas decimais, ou mais, conforme a precisão que se deseja e isso provocou a diferença observada nas respostas.

Teorema-em-ação 3: Se um ângulo mede um valor maior do que 360°, então descontam-se as voltas completas e marca-se a medida restante no círculo. (Verdadeiro).

Teorema-em-ação 4: Se um ângulo de 360° determina um arco de uma volta completa no círculo trigonométrico, então não existem ângulos maiores do que 360°. (Falso).

Os teoremas-em-ação 3 e 4 são proposições elaboradas pelos alunos durante uma atividade em que eles tinham que digitar um ângulo maior do que 360º, observar o ângulo que ficou marcado no círculo trigonométrico e explicar o que aconteceu. O teorema-em-ação 3 mostra que o grupo que o elaborou entendeu a ideia de ângulo como um giro.

Porém, o 4 mostra que o grupo não conseguiu pensar nesses giros, ficou focado na imagem na tela, onde o círculo mostra um ângulo máximo de 360º. Para esclarecimento desse falso teorema-em-ação, o teorema-em-ação 3 foi utilizado como base para a discussão.

Teorema-em-ação 5: Se um ângulo é negativo, então diminui-se o módulo desse valor do ângulo de 360° e marca-se a medida restante (para $0° > a > -360°$). (Verdadeiro).

Teorema-em-ação 6: Se no círculo trigonométrico mostrado na tela só aparecem ângulos positivos, então não existem ângulos negativos. (Falso).

Os teoremas-em-ação 5 e 6 são semelhantes aos teoremas 3 e 4, ou seja, observou-se o mesmo: um grupo compreendeu ângulo como giro e o outro não, pois ficou focado na imagem da tela. O teorema-em-ação 5 foi utilizado como base para discussão do falso teorema-em-ação com os grupos.

Teorema-em-ação 7: O número de vezes que um arco cabe em um círculo é dado pela razão entre 360° e o ângulo correspondente ao arco. (Verdadeiro).

Este teorema-em-ação foi elaborado durante uma atividade que pedia para os alunos responderem: Quantos arcos de medida igual a 1 radiano cabem no círculo trigonométrico aproximadamente? Este teorema mostra que o grupo que o elaborou percebeu que um arco, medido em radianos, é associado a um ângulo, medido em graus, e basta utilizar a razão entre 360º e o ângulo correspondente ao arco para saber quantas vezes esse arco cabe no círculo trigonométrico.

Teorema-em-ação 8: O ponto P está no 1° quadrante, P_1 está no 2° quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo *y*. Sendo assim, $A\hat{O}P_1 = 90° - A\hat{O}P + 90°$. (Verdadeiro).

Teorema-em-ação 9: O ponto P está no 1° quadrante, P_1 está no 2° quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo *y*. Sendo assim, $A\hat{O}P_1 = 180° - A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_1 = A\hat{O}P + A\hat{O}P + A\hat{O}P$. (Verdadeiro).

Teorema-em-ação 10: O ponto P está no 1° quadrante, P_3 está no 4º quadrante e é simétrico a P com relação ao eixo *x*. Sendo assim, $A\hat{O}P_3 = 270° + A\hat{O}P$ ou $A\hat{O}P_3 = 360° - A\hat{O}P$. (Verdadeiro).

Teorema-em-ação 11: O ponto P está no 1º quadrante do círculo trigonométrico, P_1 está no 2°, P_2 está no 3° e P_3 está no 4° quadrante. Se forem traçados segmentos unindo os pontos e formar-se um retângulo, então os quatro pontos são simétricos entre si. (Verdadeiro).

Os teoremas-em-ação 8, 9, 10 e 11 foram elaborados durante uma atividade sobre simetria no círculo trigonométrico. A figura 3 mostra o círculo trigonométrico que os alunos tinham na atividade. Nesse círculo, o ponto P era móvel e ao mudar sua posição os pontos P_1, P_2 e P_3 também moviam-se no círculo.

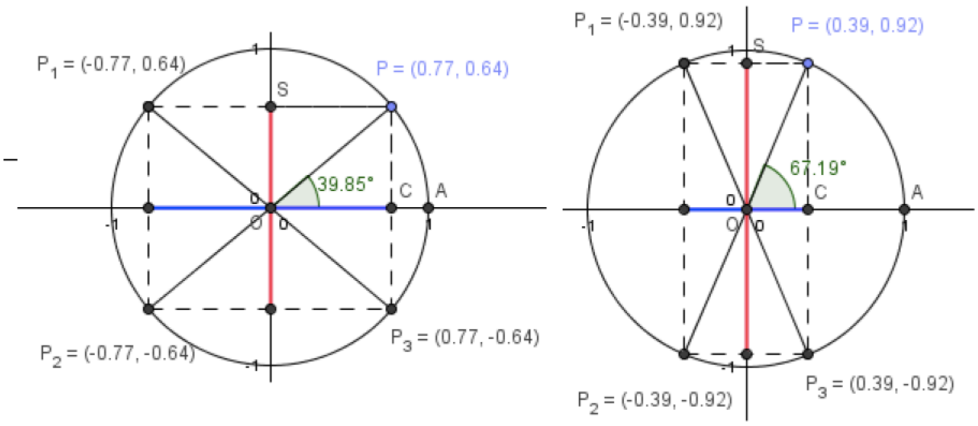

Figura 3: Simetria no círculo trigonométrico.

O teorema-em-ação 8 foi observado a partir da fala de um aluno: “...daí tu diminui 52,92º de 90º e soma o que sobrar com mais 90º daqui.”. O aluno tinha fixado o ângulo de 52,92º e conseguiu explicar o seu raciocínio para o colega. Esse teorema mostra que o aluno consegue compor e decompor ângulos.

A primeira parte do teorema-em-ação 9 é verdadeira para qualquer ângulo AÔP do primeiro quadrante e a segunda parte é válida somente para o ângulo de medida igual a 45º. O aluno foi questionado por mim sobre essa particularidade e ele respondeu que sabia disso. Tanto que escolheu o ângulo de 45º de propósito: “Melhor do que complicar com um ângulo cheio de vírgula”.

O teorema-em-ação 10 é semelhante ao 9. Já o teorema-em-ação 11 mostra uma observação interessante, em que o aluno percebeu a figura geométrica formada pela ligação entre esses pontos. O aluno conclui: “Todos são simétricos a todos”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência de ensino evidenciou confusões dos alunos relativas à noção de ângulo, desde a primeira atividade. Inicialmente, observei que alguns grupos confundiam lado do triângulo com o ângulo, ou não conseguiam mudar o ângulo de referência para a identificação dos lados. Os teoremas-em-ação citados acima nos itens 1, 2, 4 e 6 são exemplos de teoremas falsos sobre noções ou propriedades de ângulos. Essas noções errôneas foram retomadas em aula e em outras situações. Já os itens 3, 5, 7, 8, 9, 10 e 11 são exemplos de teoremas-em-ação verdadeiros sobre essas noções ou propriedades.

O uso do GeoGebra mostrou-se um programa eficaz como auxílio na elaboração de situações de aprendizagem escolar ricas em possibilidades de construção de conhecimentos. As manipulações das figuras apresentadas para os alunos, bem como as construções realizadas por eles, promoveram dinamismo nas atividades, possibilidades de realização de tentativas, confirmação de hipóteses, observação de relações entre objetos variáveis e fixos. Por outro lado, em algumas situações, o uso do GeoGebra reforçou ideias errôneas. Pudemos observar isso nas situações em que os alunos ficaram focados nas imagens mostradas na tela; os teoremas-em-ação dos itens 1, 4 e 6 são exemplos disso.

Enfim, as atividades elaboradas com o auxílio do GeoGebra promoveram discussões em aula importantes para a retomada de diferentes conceitos, em especial, do conceito de ângulo. A análise da construção do conceito de ângulo não foi o foco principal da dissertação, porém, as atividades no GeoGebra evidenciaram a necessidade de discutir e retomar conhecimentos relativos à ângulos que eu esperava que já estivessem bem desenvolvidos até aquele momento. Isso mostra que a construção de um conceito não acontece em um único momento e com uma única situação de aprendizagem, mas vai acontecendo ao longo de toda a vida escolar do aluno e vai sendo enriquecida por diferentes situações de aprendizagem que o professor proporciona.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria - Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contexto e Aplicações**. 3.ed. Vol. Único. São Paulo: Editora Ática, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. 5ª série. São Paulo: Editora Ática, 2003.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Traduzido por Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GADOTTI, Marlene de Fátima. **Definições Matemáticas do Conceito de Ângulo: Influências da História, do Movimento da Matemática Moderna e das Produções Didáticas nas Concepções dos Docentes**. 2008. 135p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Metodista de Piracicaba. São Paulo. 2008.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto; GIOVANNI Jr., José Ruy. **A Conquista da Matemática**. 5ª série. São Paulo: FTD, 2007.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar 3 -Trigonometria**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1999.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática Para Todos: 5ª série**. São Paulo: Scipione, 2003.

MOISE, Edwin E.; DOWNS, Floyd L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1971.

OLIVEIRA, Carlos N. C.; FERNANDES, Marco Antônio M. **Para Viver Juntos: Matemática**, 6° ano. São Paulo: Edições SM, 2008.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma Proposta de Ensino da Trigonometria com o Uso do *Software* GeoGebra**. 2012. 271 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 2012.

VERGNAUD, Gérard. **O que é aprender?** In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. A Aprendizagem da Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.
Curitiba: CRV, 2009.